

# Seminar: Geometrische Gruppentheorie

Matthias Blank, Francesca Diana, Bernd Ammann

Wintersemester 2012/13\*

## Zusammenfassung

Themen: Grundlagen der geometrischen Gruppentheorie, Cayley-Graphen, Wachstum von Gruppen, geodätische Räume, CAT(0)-Räume, hyperbolische Gruppen, weiterführende Beispiele.

## Inhaltsangabe

Gegenstand der geometrischen Gruppentheorie ist das Studium von Gruppen mittels geometrischer Methoden. Ausgangspunkt für diese Vorgehensweise ist, dass Gruppen in naheliegender Weise selbst als metrische Räume aufgefasst werden können. Wir werden daher Eigenschaften metrischer Räume studieren und daraus Rückschlüsse auf die (algebraischen) Eigenschaften korrespondierender Gruppen ziehen. In diesem Kontext behandeln wir insbesondere Krümmungsbegriffe für metrische Räume (CAT(0)-Räume, hyperbolische Räume).

## Vorkenntnisse

Grundkenntnisse in Algebra und Topologie/Geometrie.

## Zielgruppen

Bachelor, Master, Lehramt Gymnasium, Diplom

## Anmeldedetails

Die Vorbesprechung erfolgt am Freitag, den 20.07.2012, um 10:15 Uhr in M201.

Die Anmeldung kann alternativ auch per eMail an [matthias.blank@mathematik.uni-regensburg.de](mailto:matthias.blank@mathematik.uni-regensburg.de) erfolgen.

## Prüfungsbestandteile

Halten des Seminarvortrages, Erstellen einer schriftlichen Vortragsausarbeitung, aktive Teilnahme am Seminar.

## Anmeldeverfahren und Termine zu den Prüfungsbestandteilen

Über FlexNow.

## Liste der Module

BV, BSem, MV, MSem, LGySem

## Leistungspunkte

6

---

\*Donnerstag 12-14 Uh, M103

# Vortragsübersicht

**Vortrag 1** Cayley-Graphen; Bäume und Satz von Artin-Schreier (Michael Szubartowicz, 18.10.2012)

Graphen und Bäume, Cayley-Graph, Beispiele, Satz von Artin-Schreier (mit topologischem Beweis).  
*Literatur:* [2, Kapitel 3.2, 3.3], vergleiche auch [3, Kapitel 2-3].

**Vortrag 2** Metrische Räume (Michaela Fischer, 25.10.2012)

Metrische Räume, Geodäten, Längen von Kurven, Längenträume, Hopf-Rinow Theorem, Proposition 3.18. *Literatur:* [1, Seite 2-8, 12-14, 32-41].

**Vortrag 3** Quasi-Isometrie und Švarc-Milnor-Lemma (Matthias Blank, 08.11.2012)

Gruppenwirkungen auf metrischen Räumen, Quasi-Isometrien, Quasi-Isometrien und Gruppen, Beispiele, Švarc-Milnor Lemma, Anwendungen. *Literatur:* [1, Seite 131-141, 143-144], [2, Kapitel 5.3].

**Vortrag 4** Wachstum von metrischen Räumen und Gruppen (Paul Hellerbrand, 15.11.2012)

Wachstumsfunktionen, Wachstumstypen, Wachstum von Gruppen, Beispiele, Wachstum ist eine Quasi-Isometrie-Invariante, nilpotente Gruppen und deren Wachstum, Gromovs Theorem über polynomiales Wachstum (ohne Beweis), Anwendungen (QI-Rigidität von  $\mathbb{Z}$ ). *Literatur:* [2, Kapitel 6], [1, Seite 148-150].

**Vortrag 5** Enden (Margit Strohhofer, 22.11.2012)

Enden von Räumen und Gruppen, Quasi-Isometrie und Enden, amalgamierte Produkte und HNN-Erweiterungen, Klassifikation von Gruppen mittels Enden. *Literatur:* [1, Seite 144-148, 497], [2, Kapitel 8.2].

**Vortrag 6** Räume konstanter Krümmung (Fabian Christowiak, 29.11.2012)

Euklidischer Raum, Sphären, Hyperbolischer Raum, Geodäten in diesen Räumen, Hyperboloid-Modell, Poincaré-Modell, Halbraum-Modell, Vergleichsräume, (Existenz von Vergleichsdreiecken) *Literatur:* [1, Seite 15-25, 86-91].

**Vortrag 7**  $CAT(\kappa)$ -Räume (Ramona Schiller, 06.12.2012)

Definition und Charakterisierungen von  $CAT(\kappa)$ , 4-Punkt-Bedingung, Theorem 1.12, Beispiele. *Literatur:* [1, Seite 158-168].

**Vortrag 8** Isometrie-Gruppen von Modellräumen (Francesca Diana, 13.12.2012)

Beweis von Theorem 2.24, Isometrien von  $\mathbb{H}^2$ , elliptische, hyperbolische und parabolische Isometrien, halb-einfache Isometrien. *Literatur:* [1, Seite 26-30, 91-92, 228-232].

**Vortrag 9** Hyperbolische Räume (Michael Gösswein, 20.12.2012)

Hyperbolische Räume, Flache-Ebene Theorem, Quasi-Isometrie-Invarianz von hyperbolischen Räumen, Beispiele. *Literatur:* [1, Seite 398-405], [2, Kapitel 7.2].

**Vortrag 10** Hyperbolische Gruppen (Cristina Pagliantini, 10.01.2013)

Definition hyperbolische Gruppe, Beispiele, Wort-Problem, Generische Gruppen sind hyperbolisch, Theorem 3.2. *Literatur:* [2, Kapitel 7.3, 7.4], [1, 448-451, 459-460].

**Vortrag 11** Ränder von hyperbolischen Räumen (Johann Haas, 17.01.2013)

Definition des Randes, Quasi-Isometrie-Invarianz des Randes, Anwendungen (ohne Beweis). *Literatur:* [1, Seite 427-434], [2, Kapitel 8.3].

**Vortrag 12** Konstruktion von Outer Space (Matthias Blank, 24.01.2013)

*Literatur:* Wird noch bekannt gegeben (Arbeiten von Karen Vogtmann und Marc Culler).

**Vortrag 13** Eigenschaften von Outer Space (Matthias Blank, 31.01.2013)

*Literatur:* Wird noch bekannt gegeben.

## Notwendig für die erfolgreiche Teilnahme sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnahme (stellen Sie bitte immer Fragen, wenn sie etwas nicht verstehen)
- Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.
- Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese muss bis spätestens eine Woche vor dem Vortrag bei Herrn Blank oder Frau Diana abgegeben werden.
- Bitte kommen Sie spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag bei Herrn Blank oder Frau Diana vorbei, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen. Die Materie Ihres Vortrags sollten Sie bis dahin durchgearbeitet haben. In den letzten beiden Wochen vor dem Vortrag geht es nur noch um die letzten offengebliebenen Fragen und die vortragstechnische Vorbereitung.

## Literatur

- [1] M. Bridson, A. Haefliger *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer (1999)
- [2] C. Löh. *Geometric group theory, an introduction*, Skript zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“ im WS 2010/11, Universität Regensburg,  
[http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt\\_ws1011/lecture\\_notes.pdf](http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt_ws1011/lecture_notes.pdf)
- [3] J-P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, Berlin (2003)