Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie II

Dr. M. Blank/Dr. W. Thumann — Blatt 0 vom 10. April 2015

Aufgabe 1 (Wiederholung: Quasi-Isometrien)**.** Zeigen Sie: Eine Abbildung $\varphi\colon \Lambda \to \Gamma$ zwischen endlich erzeugten Gruppen ist eine Quasi-Isometrie genau dann wenn die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:

a) Für alle Folgen $(\alpha_i, \beta_i) \in \Lambda \times \Lambda$ gilt

$$\alpha_i^{-1}\beta_i \to \infty \text{ in } \Lambda \iff \varphi(\alpha_i)^{-1}\varphi(\beta_i) \to \infty \text{ in } \Gamma$$

Dabei bedeutet $g_i \to \infty$ für eine Folge (g_i) in einer Gruppe G: Für jede endliche Teilmenge $S \subset G$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\gamma_i \notin S$ für alle $i \geq N$.

b) Es gibt eine endliche Teilmenge $C \subset \Lambda$ mit

$$\varphi(\Lambda) \cdot C = \Gamma$$

Aufgabe 2 (Wiederholung: Bäume sind quasi-isometrisch)**.** Sei T_k die geometrische Realisierung des Baums, in dem jede Ecke Valenz $k \in \mathbb{N}$ hat (d.h. jede Ecke ist in genau k Kanten enthalten). Skizzieren Sie eine Quasi-Isometrie $\varphi_k\colon T_3 \to T_k$ für $k = 4$. Wie kann man dies für größere $k \geq 4$ verallgemeinern?

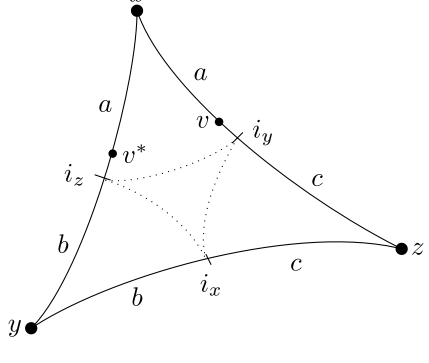
Aufgabe 3 (Wiederholung: Hyperbolizität)**.** Sei $\Delta = \Delta(x, y, z)$ ein geodätisches Dreieck in einem geodätischen Raum X mit Eckpunkten $x, y, z \in X$. Es gibt eindeutige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$d(x, y) = a + b \quad d(x, z) = a + c \quad d(y, z) = b + c$$

Entsprechend gibt es eindeutige Punkte i_x, i_y, i_z auf den Seiten von Δ mit

$$\begin{aligned} d(x, i_y) &= a = d(x, i_z) \\ d(y, i_x) &= b = d(y, i_z) \\ d(z, i_x) &= c = d(z, i_y) \end{aligned}$$

Ist v ein Punkt auf $(x, i_y) = [x, i_y] \setminus \{x, i_y\}$, so gibt es genau einen Punkt v^* auf (x, i_z) mit $d(x, v) = d(x, v^*)$. Definiere v^* entsprechend für alle anderen Punkte v auf Teilseiten von Δ.



Bitte wenden

Sei $\delta > 0$. Das Dreieck Δ heiße δ-*dünn*, falls jede Seite in der δ-Umgebung der anderen beiden Seiten liegt (vgl. Vorlesung im letzten Semester). Es heiße δ-*schlank*, falls $d(v, v^*) \leq \delta$ für jedes v auf Δ. Es heiße δ-*klein*, falls

$$\operatorname{diam}\{i_x, i_y, i_z\} = \max\{d(i_x, i_y), d(i_x, i_z), d(i_y, i_z)\} \leq \delta$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) Es gibt ein $\delta_0 > 0$ so, dass jedes geodätische Dreieck δ_0-schlank ist.

b) Es gibt ein $\delta_1 > 0$ so, dass jedes geodätische Dreieck δ_1-dünn ist.

c) Es gibt ein $\delta_2 > 0$ so, dass jedes geodätische Dreieck δ_2-klein ist.

Keine Abgabe!