Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie II

Dr. M. Blank/Dr. W. Thumann — Blatt 1 vom 17. April 2015

Aufgabe 1* (Geodäten und Mittelpunkte)**.** Sei X ein metrischer Raum.

a) Sei $c\colon [a,b] \to X$ ein stetiger Weg mit

$$d\big(c(a), c(b)\big) = d(a,b) = b - a$$

Zeigen Sie, dass c genau dann eine Geodätische ist, falls

$$d\big(c(s), c(t)\big) = 2d\left(c(s), c\left(\frac{s+t}{2}\right)\right)$$

für alle $s, t \in [a,b]$ gilt.

b) Sei X vollständig und es gebe für je zwei Punkte $x, y \in X$ einen Punkt $m \in X$ mit

$$d(x,m) = d(y,m) = \frac{1}{2} d(x,y)$$

Zeigen Sie, dass X ein geodätischer Raum ist.

Aufgabe 2 (Reparametrisierung nach Bogenlänge)**.** Geben Sie einen detaillierten Beweis der folgenden Eigenschaft: Sei $c\colon [a,b] \to X$ ein rektifizierbarer Weg in einem metrischen Raum X. Dann gibt es genau eine Abbildung $\tilde{c}\colon [0, l(c)] \to X$ mit $\tilde{c} \circ \lambda_c = c$, wobei λ_c die Bogenlängenfunktion von c ist. Diese Abbildung $\tilde{c}$ ist dann stetig und erfüllt

$$l\left(\tilde{c}|_{[0,t]}\right) = t$$

für alle $t \in [0, l(c)]$.

Folgern Sie dann: Das Bild eines stetigen Weges $c\colon [a,b] \to X$ mit

$$d\big(c(a), c(b)\big) = l(c)$$

ist ein geodätisches Segment.

Aufgabe 3* (Normierte Räume und Geodätische)**.** Sei X ein reeller normierter Vektorraum.

a) Zeigen Sie, dass X genau dann *eindeutig* geodätisch ist, wenn für alle $v, w \in X$ mit $v \neq 0 \neq w$ gilt:

$$\|v + w\| = \|v\| + \|w\| \quad \Longrightarrow \quad \exists_{\alpha \in \mathbb{R}_{>0}}\ v = \alpha w$$

b) Sei X nun ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass X eindeutig geodätisch ist.

Bonusaufgabe: Finden Sie ein Beispiel eines reellen normierten Raumes, der eindeutig geodätisch, aber kein Hilbertraum ist. Besser noch: Finden Sie einen solchen Raum, bei dem die Norm noch nicht einmal von einem Skalarprodukt induziert wird.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (ℓ^1 **und** ℓ^∞)**.** Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^2$ die folgenden beiden Normen

$$\|(x,y)\|_1 := \|x\| + \|y\|$$
$$\|(x,y)\|_\infty := \max\big\{|x|, |y|\big\}$$

und die beiden dadurch induzierten Metriken d_1 und d_∞.

a) Zeigen Sie, dass $X_1 := (\mathbb{R}^2, d_1)$ und $X_2 := (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ isometrisch sind.

b) Zeigen Sie, dass X_1 und X_2 nicht *eindeutig* geodätisch sind.

c) Geben Sie einen stetigen Weg $c\colon [0,1] \to X_2$ an, der

$$d\big(c(0), c(t)\big) = t$$

für alle $t \in [0,1]$ erfüllt, aber keine Geodätische ist.

Aufgaben mit Stern $\star$ sollten abgegeben werden, Aufgaben ohne Symbol sollten in der Übung vorgerechnet werden können.

Abgabe bis zum 24. April 2015, 10:00 Uhr, in den Briefkasten.