Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie II

Dr. M. Blank/Dr. W. Thumann — Blatt 2 vom 23. April 2015

Aufgabe 1 (Satz von Mazur-Ulam)**.** Seien X, Y reelle normierte Vektorräume und $\alpha\colon X \to Y$ eine bijektive Isometrie. Zeigen Sie mithilfe der folgenden Anleitung, dass α bereits affin ist.

- Per Definition ist α genau dann affin, wenn $\alpha - \alpha(0)$ linear ist. Zeigen Sie, dass dies bereits dann der Fall ist, wenn

$$\alpha\big((1-t)x_1 + tx_2\big) = (1-t)\alpha(x_1) + t\alpha(x_2)$$

  für alle $x_1, x_2 \in X$ und alle $t \in [0,1]$ gilt.

- Zeigen Sie, dass Letzteres genau dann der Fall ist, wenn

$$\alpha\big(m(x_1, x_2)\big) = m\big(\alpha(x_1), \alpha(x_2)\big)$$

  für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt. Dabei bezeichne $m(x,y) = (x+y)/2$ den Mittelpunkt der beiden Punkte x und y.

- Um Letzteres für gegebene Punkte $x_1, x_2 \in X$ zu zeigen, betrachten Sie den Abstand $\delta_{x_1}^{x_2}(\alpha)$ dieser beiden Mittelpunkte und zeigen Sie, dass dieser unabhängig von α nach oben beschränkt ist.

- Betrachten Sie dann die Isometrie $\alpha' := \alpha^{-1} \circ s \circ \alpha$, wobei $s\colon Y \to Y$ die Punktspiegelung in $m(\alpha(x_1), \alpha(x_2))$ ist, und berechnen Sie $\delta_{x_1}^{x_2}(\alpha')$ in Abhängigkeit von $\delta_{x_1}^{x_2}(\alpha)$. Was folgt hieraus für letztere Zahl?

Aufgabe 2* (Tits-Stern)**.** Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^2$ die Metrik

$$\begin{aligned} d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} |r_x - r_y| + \min\{r_x, r_y\} \cdot \sqrt{\|v_x - v_y\|} & \text{falls } r_x \neq 0 \neq r_y \\ |r_x - r_y| & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $r_x = \|x\|$, $v_x = x/\|x\|$ und $\|.\|$ die Euklidische Norm ist. Berechnen Sie explizit die Längenmetrik $\bar{d}$ auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3* (Quotientenmetrik und Verkleben)**.** Sei X ein metrischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Auf $X/{\sim}$ sei eine Pseudometrik durch

$$d\big([x],[y]\big) = \inf \sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_i)$$

definiert, wobei das Infimum über alle Tupel $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ mit $x_1 \in [x]$, $y_n \in [y]$ und $y_i \sim x_{i+1}$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ läuft.

a) Beachten Sie, dass die kanonische Projektion $\pi\colon X \to X/{\sim}$ eine metrische Abbildung ist, d.h. es gilt

$$d\big(\pi(x), \pi(y)\big) \leq d(x,y)$$

für alle $x, y \in X$. Zeigen Sie die universelle Eigenschaft der Quotientenpseudometrik: In einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/\sim \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

von pseudometrischen Räumen ist g eine metrische Abbildung genau dann, wenn f eine ist.

b) Betrachten Sie den Quotientenraum

$$\Big(\bigcup_{x \in S^1} [0, \infty) \times \{x\} \Big) \Big/ \sim$$

nach der Äquivalenzrelation erzeugt durch $(0, x) \sim (0, x')$ für $x, x' \in S^1$ zusammen mit der Quotientenpseudometrik. Dabei trage die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{x \in S^1} [0, \infty) \times \{x\}$ die Metrik

$$d\big((t, x), (t', x')\big) = \begin{cases} |t - t'| & \text{falls } x = x' \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Dieser Raum ist isometrisch zu $\mathbb{R}^2$ zusammen mit der Metrik

$$d(x, x') = \begin{cases} \big| \|x\| - \|x'\| \big| & \text{falls } x \neq 0 \neq x' \text{ und } \frac{x}{\|x\|} = \frac{x'}{\|x'\|} \\ \|x\| + \|x'\| & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 4 (Isometriegruppen von kompakten Räumen)**.** Sei X ein kompakter metrischer Raum. Auf der Gruppe $\mathrm{Isom}(X)$ aller Isometrien von X kann eine Metrik durch

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{x \in X} d\big(\gamma_1(x), \gamma_2(x)\big)$$

definiert werden. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Isom}(X)$ mit der von dieser Metrik induzierten Topologie kompakt ist.

Aufgaben mit Stern $\star$ sollten abgegeben werden, Aufgaben ohne Symbol sollten in der Übung vorgerechnet werden können.

Abgabe bis zum 30. April 2015, 18:00 Uhr, in den Briefkasten.