Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie II

Dr. M. Blank/Dr. W. Thumann — Blatt 3 vom 30. April 2015

Aufgabe 1* (Hopf-Rinow)**.** Der Satz von Hopf-Rinow besagt, dass ein Längenraum bereits geodätisch ist, wenn er lokalkompakt und vollständig ist. Geben Sie einen Längenraum X an, der nicht geodätisch ist und außerdem folgende Eigenschaften erfüllt:

a) X ist lokalkompakt aber nicht vollständig.

b) X ist nicht lokalkompakt aber vollständig.

c) X ist weder lokalkompakt noch vollständig.

Aufgabe 2 (Elementare Eigenschaften der n-Sphäre)**.** Zeigen Sie

a) den sphärischen Kosinussatz für $\mathbb{S}^n$.

b) mithilfe des sphärischen Kosinussatzes die Dreiecksungleichung für $d^n_{\mathbb{S}}$.

c) dass es zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{S}^n$ stets ein geodätisches Segment in $\mathbb{S}^n$ gibt und genau eines, falls zusätzlich $d^n_{\mathbb{S}}(x, y) < \pi$ gilt.

Aufgabe 3* (Die n-Sphäre als Längenraum)**.** Die Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^{n+1}$ induziert eine Metrik d auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, welche wiederum eine Längenmetrik $\bar{d}$ auf S^n induziert. Zeigen Sie $\bar{d} = d^n_{\mathbb{S}}$.

Aufgabe 4 (Minkowski-Bilinearform)**.** Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ die Minkowski-Bilinearform auf $\mathbb{R}^{n+1}$. Für $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ sei $x^\perp := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, y \rangle_M = 0\}$.

a) Zeigen Sie, dass die Einschränkung von $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ auf $x^\perp$ für jedes $x \in \mathbb{H}^n$ positiv definit ist.

b) Sei $x \in \mathbb{H}^n$. Zeigen Sie, dass $x^\perp$ der Tangentialraum von $\mathbb{H}^n$ an x im folgenden Sinne ist: Ist $\gamma \colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Kurve mit $\operatorname{im} \gamma \subset \mathbb{H}^n$ und $\gamma(0) = x$, so gilt $\gamma'(0) \in x^\perp$. Umgekehrt, ist $v \in x^\perp$, so gibt es eine solche glatte Kurve γ mit $\gamma'(0) = v$.

c) Zeigen Sie, dass die Riemannsche Länge eines hyperbolischen Segments gleich $d^n_{\mathbb{H}}(x, y)$ ist, wobei x, y die Endpunkte des Segments sind. Das bedeutet: Sei $\gamma \colon [0, l] \to \mathbb{H}^n$ eine injektive und glatte Parametrisierung eines hyperbolischen Segments. Die Riemannsche Länge von γ ist das Integral

$$\int_0^l \|\gamma'(t)\|_M \, dt$$

wobei $\|\gamma'(t)\|_M := \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_M}$.

Aufgaben mit Stern $\star$ sollten abgegeben werden, Aufgaben ohne Symbol sollten in der Übung vorgerechnet werden können.

Abgabe bis zum 8. Mai 2015, 10:00 Uhr, in den Briefkasten.