Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie II

Dr. M. Blank/Dr. W. Thumann Blatt 4 vom 8. Mai 2015

Aufgabe 1 (Hyperbolische Hyperebenen)**.** Sei V ein n-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $H := V \cap \mathbb{H}^n \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass H isometrisch zu $\mathbb{H}^{n-1}$ ist. Folgern Sie, dass allgemeiner nicht-leere Schnitte von m-dimensionalen Unterräumen mit $\mathbb{H}^n$ isometrisch zu $\mathbb{H}^{m-1}$ sind.

Aufgabe 2 (Hyperbolischer Raum ist hyperbolisch)**.** Zeigen Sie, dass der hyperbolische Raum $\mathbb{H}^n$ 1-hyperbolisch ist.

Hinweise: Führen Sie zuerst die Fragestellung auf den Fall $n = 2$ zurück. Betrachten Sie dann große Dreiecke im Ball-Modell der hyperbolischen Ebene und zeigen Sie, dass diese 1-klein sind (siehe Aufgabe 3 auf Blatt 0).

Aufgabe 3* (Fast-Mittelpunkte sind nahe an Mittelpunkten)**.** Zeigen Sie:

a) Sei (X, d) proper und geodätisch. Seien $x, y \in X$ so, dass es ein eindeutiges geodätisches Segment $[x, y]$ zwischen x und y gibt. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es dann ein $\delta > 0$ so, dass jeder Punkt $z \in X$ mit

$$d(x, z) + d(z, y) < d(x, y) + \delta$$

bereits in der ϵ-Umgebung von $[x, y]$ liegt.

Hinweis: Betrachten Sie den Rand der ϵ-Umgebung von $[x, y]$ und eine passende stetige Funktion darauf, welche dann ein gewisses Minimum annehmen muss.

Folgern Sie daraus:

b) Sei $\kappa \in \mathbb{R}_{\leq 0}$. Für jedes $\epsilon > 0$ und $l \geq 0$ gibt es dann ein $\delta > 0$ so, dass gilt: Sind x, y Punkte in $\mathbb{M}^2_\kappa$ mit $d(x, y) \leq l$ und ist m' ein weiterer Punkt mit

$$\max\left\{d(x, m'), d(y, m')\right\} < \frac{1}{2} d(x, y) + \delta$$

so gilt $d(m, m') < \epsilon$, wobei m der Mittelpunkt des eindeutigen geodätischen Segments $[x, y]$ ist.

Hinweis: Fixieren Sie zuerst ein geodätisches Segment der Länge l und nehmen Sie dann ohne Einschränkung (warum?) an, dass das Segment $[x, y]$ stets in diesem liegt.

Aufgabe 4* (Vergleichsdreiecke)**.** Sei $\kappa \in \mathbb{R}$. Seien weiter x, y, z drei Punkte in einem metrischen Raum X. Falls $\kappa > 0$, so gelte weiter

$$d(x, y) + d(y, z) + d(x, z) < 2D_\kappa = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

Zeigen Sie, dass es bis auf Isometrie eindeutige Punkte $x', y', z' \in \mathbb{M}^2_\kappa$ gibt mit

$$d(x', y') = d(x, y) \quad \text{und} \quad d(x', z') = d(x, z) \quad \text{und} \quad d(y', z') = d(y, z)$$

Aufgaben mit Stern $\star$ sollten abgegeben werden, Aufgaben ohne Symbol sollten in der Übung vorgerechnet werden können.

Abgabe bis zum 15. Mai 2015, 10:00 Uhr, in den Briefkasten.