

Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie II

Dr. M. Blank/Dr. W. Thumann

Blatt 5 vom 15. Mai 2015

Aufgabe 1 (Hexagon in der hyperbolischen Ebene). Seien $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass es bis auf Isometrie genau ein rechtwinkliges Hexagon in \mathbb{H}^2 gibt, so dass drei nicht benachbarte Seiten genau die Längen l_1, l_2, l_3 haben.

Hinweis: Betrachten Sie das Poincaré Ball-Modell der hyperbolischen Ebene. Die Aufgabe kann ohne Rechnungen gelöst werden.

Aufgabe 2* (Vergleichsdreiecke und Mittelpunkte). Sei $\kappa \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ und X ein geodätischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann ein $\text{CAT}(\kappa)$ Raum ist, wenn für alle geodätischen Dreiecke mit Eckpunkten $x, y, z \in X$

$$d(m, x) \leq d(\bar{m}, \bar{x})$$

gilt. Dabei ist m der Mittelpunkt des geodätischen Segments zwischen y und z und \bar{m} der Mittelpunkt des geodätischen Segments $[\bar{y}, \bar{z}]$ im Vergleichsdreieck in \mathbb{M}_{κ}^2 mit Eckpunkten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

Aufgabe 3* (CN-Ungleichung). Sei X ein geodätischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann $\text{CAT}(0)$ ist, wenn es für alle $q, r \in X$ ein $m \in X$ so gibt, dass

$$d(p, m)^2 \leq \frac{1}{2} \left(d(p, q)^2 + d(p, r)^2 \right) - \frac{1}{4} d(q, r)^2$$

für alle $p \in X$ gilt.

Aufgabe 4 (Teilmengen von \mathbb{E}^n und Krümmung). Begründen Sie durch kurze Skizzen:

- Sei $X_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n \mid \exists_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i \geq 0\}$. Dann ist $X_2 \subset \mathbb{E}^2$ zusammen mit der induzierten Längenmetrik $\text{CAT}(0)$.
- Die Teilmenge $X_3 \subset \mathbb{E}^3$ zusammen mit der induzierten Längenmetrik ist nicht $\text{CAT}(0)$.
- Sei L ein Geradenstück in \mathbb{E}^2 und d die von \mathbb{E}^2 induzierte Längenmetrik auf $X := \mathbb{E}^2 \setminus L$. Dann hat die metrische Vervollständigung von (X, d) Krümmung ≤ 0 aber ist nicht $\text{CAT}(0)$.

Aufgaben mit Stern \star sollten abgegeben werden, Aufgaben ohne Symbol sollten in der Übung vorgerechnet werden können.

Abgabe bis zum 22. Mai 2015, 10:00 Uhr, in den Briefkasten.