Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie II

Dr. M. Blank/Dr. W. Thumann — Blatt 6 vom 22. Mai 2015

Aufgabe 1 ($\mathbb{R}$-Bäume)**.** Auf $X = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei die Metrik

$$d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{falls } x_1 = y_1 \\ x_2 + y_2 + |x_1 - y_1| & \text{falls } x_1 \neq y_1 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass (X, d) ein $\mathbb{R}$-Baum ist.

Aufgabe 2* (Konvexität)**.** Zeigen Sie, dass die Metrik eines CAT(0) Raumes konvex ist, d.h. für je zwei cs-Geodäten $c_1, c_2 \colon [0,1] \to X$ gilt

$$d\big(c_1(t), c_2(t)\big) \leq (1-t) \cdot d\big(c_1(0), c_2(0)\big) + t \cdot d\big(c_1(1), c_2(1)\big)$$

für alle $t \in [0,1]$.

Aufgabe 3* (Flache Vierecke)**.** Sei X ein CAT(0) Raum und $\square$ ein Viereck in X gegeben durch Punkte $p, q, r, s \in X$ zusammen mit geodätischen Segmenten

$$[p,q], [q,r], [r,s] \quad \text{und} \quad [s,p].$$

Zeigen Sie, dass die Innenwinkelsumme eines solchen Vierecks stets $\leq 2\pi$ ist und falls sie gleich 2π ist, dass dann die konvexe Hülle von $\square$ isometrisch ist zur konvexen Hülle eines konvexen Vierecks in $\mathbb{E}^2$.

Aufgabe 4 (Quasi-Isometrien und CAT(0))**.** Zeigen Sie, dass die CAT(0) Ungleichung nicht invariant unter Quasi-Isometrien ist. Das heißt: Es gibt geodätische Räume X, Y und eine Quasi-Isometrie $f \colon X \to Y$ so, dass X CAT(0) ist aber nicht Y.

Aufgaben mit Stern $\star$ sollten abgegeben werden, Aufgaben ohne Symbol sollten in der Übung vorgerechnet werden können.

Abgabe bis zum 29. Mai 2015, 10:00 Uhr, in den Briefkasten.