Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie II

Dr. M. Blank/Dr. W. Thumann — Blatt 7 vom 29. Mai 2015

Aufgabe 1 (Flache Dreiecke)**.** Sei X ein CAT(0) Raum und $x, y, z \in X$ paarweise verschiedene Punkte. Betrachten Sie das geodätische Dreieck $\Delta = \Delta(x, y, z)$ und ein Vergleichsdreieck $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in $\mathbb{E}^2$.

a) Sei q ein Punkt im Inneren des geodätischen Segments $[x, y]$. Es gelte $d(z, q) = d(\bar{z}, \bar{q})$. Zeigen Sie, dass Δ flach ist.

b) Sei q wie oben und p ein Punkt im Inneren des geodätischen Segments $[x, z]$. Es gelte $d(p, q) = d(\bar{p}, \bar{q})$. Zeigen Sie, dass Δ flach ist.

Aufgabe 2* (Induzierte Längenmetrik)**.** Sei Y ein Hausdorffraum, X ein Längenraum und $p\colon Y \to X$ ein lokaler Homöomorphismus. Zeigen Sie, dass p eine lokale Isometrie ist, wenn man auf Y die Metrik

$$d(y_1, y_2) := \inf \left\{ l(p \circ \gamma) \mid \gamma \text{ stetiger Weg von } y_1 \text{ nach } y_2 \right\}$$

betrachtet.

Aufgabe 3* (Längenmetrik auf einem Quotienten)**.** Sei Y ein Längenraum und $p\colon Y \to X$ eine surjektive Abbildung. Nehmen Sie an, dass die Quotientenpseudometrik auf X eine Metrik ist. Zeigen Sie, dass X dann auch ein Längenraum ist.

Aufgabe 4 (Überlagerungen der 8)**.** Sei F_2 die freie Gruppe vom Rang 2, also die Fundamentalgruppe von $S^1 \vee S^1$, der Einpunktvereinigung zweier Kreise. Finden Sie mithilfe der Überlagerungstheorie Untergruppen $G < F_2$ von endlichem Index mit

a) $G \lneq NG = F_2$

b) $G \lneq NG \lneq F_2$

c) $G = NG \lneq F_2$

Dabei sei NG der Normalisator von G in F_2.

Aufgaben mit Stern $\star$ sollten abgegeben werden, Aufgaben ohne Symbol sollten in der Übung vorgerechnet werden können.

Abgabe bis zum 05. Juni 2015, 10:00 Uhr, in den Briefkasten.