

Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie II

Dr. M. Blank/Dr. W. Thumann

Blatt 8 vom 05. Juni 2015

Aufgabe 1 (8-Eck in der hyperbolischen Ebene). Zeigen Sie, dass es in \mathbb{H}^2 ein geodätisches 8-Eck mit den folgenden beiden Eigenschaften gibt:

- Alle Seiten sind gleich lang.
- Der Winkel zwischen je zwei Seiten ist $\pi/4$.

Wie lang sind die Seiten eines solchen 8-Ecks?

Aufgabe 2* (Hyperbolische Flächengruppe). Sei S die orientierbare geschlossene Fläche vom Geschlecht 2. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe von S hyperbolisch ist.

Aufgabe 3* (Fundamentalgruppe von nicht-positiv gekrümmten Räumen). Sei X ein vollständiger Längensraum nicht-positiver Krümmung. Sei $x_0 \in X$ und $G := \pi_1(X, x_0)$.

- Folgern Sie aus dem Satz von Cartan-Hadamard, dass jedes $g \in G$ durch eine eindeutige lokale Geodäte repräsentiert wird.
- Zeigen Sie, dass G torsionsfrei ist, d.h. jedes Element $1 \neq g \in G$ hat unendliche Ordnung.

Aufgabe 4 (Längenmetrik und Vollständigkeit). Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und \bar{d} die induzierte Längenmetrik. Zeigen Sie:

- Falls d und \bar{d} die gleiche Topologie induzieren, so ist auch (X, \bar{d}) vollständig.
- Im Allgemeinen muss (X, \bar{d}) nicht vollständig sein.

Aufgaben mit Stern \star sollten abgegeben werden, Aufgaben ohne Symbol sollten in der Übung vorgerechnet werden können.

Abgabe bis zum 12. Juni 2015, 10:00 Uhr, in den Briefkasten.