

Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie II

Dr. M. Blank/Dr. W. Thumann

Blatt 9 vom 12. Juni 2015

Aufgabe 1 (Produkte und CAT(0)). Zeigen Sie für metrische Räume X_1, X_2 :

- a) $X_1 \times X_2$ ist geodätisch genau dann, wenn X_1 und X_2 geodätisch sind.
- b) $X_1 \times X_2$ ist CAT(0) genau dann, wenn X_1 und X_2 CAT(0) sind.

Aufgabe 2 (Produktzerlegung von Isometrien). Seien X, Y metrische Räume und $Z = X \times Y$. Zeigen Sie, dass eine Isometrie γ von Z genau dann von der Form (α, β) mit α, β Isometrien von X bzw. Y ist, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ einen Punkt $x' \in X$ mit $\gamma(\{x\} \times Y) = \{x'\} \times Y$ gibt.

Aufgabe 3* (Halb-einfache Isometrien und Produktzerlegung). Seien X, Y metrische Räume und $\alpha: X \rightarrow X$ sowie $\beta: Y \rightarrow Y$ Isometrien. Seien weiter $Z = X \times Y$ und $\gamma = (\alpha, \beta)$. Dann ist die Isometrie $\gamma: Z \rightarrow Z$ genau dann halb-einfach, wenn α und β es sind.

Aufgabe 4* (Isometrien auf der hyperbolischen Ebene I). Die Gruppe $GL(2, \mathbb{R})$ wirkt auf dem Poincaré-Halbebenenmodell der hyperbolischen Ebene \mathbb{H}^2 mittels Isometrien durch

$$A \cdot z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{falls } \det(A) > 0 \\ \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} & \text{falls } \det(A) < 0 \end{cases}$$

Die Untergruppe $SL(2, \mathbb{R}) \subset GL(2, \mathbb{R})$ operiert dann durch orientierungserhaltende Isometrien. Zeigen Sie für $\pm 1 \neq A \in SL(2, \mathbb{R})$ mithilfe von Linearer Algebra:

- a) A ist diagonalisierbar über \mathbb{C} aber nicht über \mathbb{R} \iff A wirkt elliptisch.
- b) A ist diagonalisierbar über \mathbb{R} \iff A wirkt hyperbolisch.
- c) A ist nicht diagonalisierbar über \mathbb{C} \iff A wirkt parabolisch.

Hinweis: Nutzen Sie die Invarianz der Isometrietypen unter Konjugation und bringen Sie A auf eine passende Normalform.

Aufgaben mit Stern \star sollten abgegeben werden, Aufgaben ohne Symbol sollten in der Übung vorgerechnet werden können.

Abgabe bis zum 19. Juni 2015, 10:00 Uhr, in den Briefkasten.