Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie II

Dr. M. Blank/Dr. W. Thumann — Blatt 10 vom 19. Juni 2015

Aufgabe 1* (Isometrien auf der hyperbolischen Ebene II)**.** Betrachten Sie die Wirkung von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ auf dem Poincaré-Halbebenenmodell der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$ aus Aufgabe 4 auf Blatt 9. Zeigen Sie für $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ mit $A \neq \pm 1$ mithilfe der Fixpunktcharakterisierung von elliptischen bzw. hyperbolischen bzw. parabolischen Isometrien:

a) $|\operatorname{Spur}(A)| < 2 \iff A$ wirkt elliptisch.

b) $|\operatorname{Spur}(A)| > 2 \iff A$ wirkt hyperbolisch.

c) $|\operatorname{Spur}(A)| = 2 \iff A$ wirkt parabolisch.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $c = 0$ und $c \neq 0$ und suchen Sie Fixpunkte im Inneren und auf dem Rand von $\mathbb{H}^2$.

Aufgabe 2 (Isometrien auf Bäumen)**.** Sei T die geometrische Realisierung eines simplizialen Baums. Zeigen Sie, dass jede Isometrie auf T halb-einfach ist.

Aufgabe 3 (Parabolische Isometrien auf Hilberträumen)**.** Aus der Vorlesung wissen wir, dass es keine parabolischen Isometrien auf $\mathbb{E}^n$ gibt. Gilt dies auch allgemeiner für Hilberträume?

Hinweis: Betrachten Sie einen linearen Operator A auf einem Hilbertraum mit

$$\overline{\operatorname{Bild}(A)} \setminus \operatorname{Bild}(A) \neq \emptyset$$

Existiert solch ein Operator?

Aufgabe 4* (Hyperbolische Mannigfaltigkeiten)**.** Eine n-dimensionale hyperbolische Mannigfaltigkeit ist ein Längenraum M, welcher lokal isometrisch zu $\mathbb{H}^n$ ist, d.h. für jeden Punkt $x \in M$ gibt es ein $r > 0$ so, dass $B(x,r)$ isometrisch zu einem Ball in $\mathbb{H}^n$ ist.

Sei M eine zusammenhängende kompakte hyperbolische Mannigfaltigkeit mit Fundamentalgruppe G. Zeigen Sie, dass G keine frei abelschen Untergruppen vom Rang ≥ 2 haben kann.

Anmerkung: Dieser Satz wurde bereits in der letzten Vorlesung diskutiert. Versuchen Sie ihn mit den Resultaten aus der aktuellen Vorlesung zu beweisen.

Aufgaben mit Stern $\star$ sollten abgegeben werden, Aufgaben ohne Symbol sollten in der Übung vorgerechnet werden können.

Abgabe bis zum 26. Juni 2015, 10:00 Uhr, in den Briefkasten.