Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie II

Dr. M. Blank/Dr. W. Thumann — Blatt 11 vom 26. Juni 2015

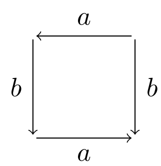
Aufgabe 1 (Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche)**.** Betrachten Sie die Gruppe

$$G := \mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z} = \left\langle a, b \mid bab^{-1} = a^{-1} \right\rangle$$

mit $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ gegeben durch $\varphi(1)(a) = -a$.

a) Finden Sie eine eigentlich diskontinuierliche und halb-einfache Wirkung von G auf $\mathbb{E}^2$ mit der Eigenschaft, dass $G\backslash\mathbb{E}^2$ homöomorph zur Kleinschen Flasche K ist. Folgern Sie $\pi_1(K) \cong G$.

   Die Kleinsche Flasche erhält man, wenn man gegenüberliegende Seiten eines Quadrats mit den im Bild angedeuteten Orientierungen verklebt:

b) G wirke eigentlich auf einem vollständigen CAT(0) Raum X mittels halb-einfacher Isometrien. Zeigen Sie, dass es dann eine konvexe G-invariante Teilmenge $C \subset X$ gibt, welche isometrisch zu $\mathbb{E}^2$ ist und auf der G kokompakt wirkt.

   Hinweis: Die Kleinsche Flasche wird vom Torus zweifach überlagert. Es gibt also eine Untergruppe von G vom Index 2, welche isomorph zu $\mathbb{Z}^2$ ist.

Aufgabe 2* (Eine nicht-CAT(0) Gruppe)**.** Sei F_3 die freie Gruppe in drei Erzeugern a, b, c und $t = 1 \in \mathbb{Z}$. Sei $\phi\colon F_3 \to F_3$ der Automorphismus gegeben durch

$$\phi(a) = a \quad \phi(b) = ba \quad \phi(c) = ca^2$$

und $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(F_3)$ der Homomorphismus definiert durch $\varphi(t) = \phi$. Betrachten Sie die Gruppe

$$G := F_3 \rtimes_\varphi \mathbb{Z} = \left\langle a, b, c, t \mid tat^{-1} = a, tbt^{-1} = ba, tct^{-1} = ca^2 \right\rangle$$

Zeigen Sie, dass es keine eigentliche Wirkung von G auf einem CAT(0) Raum mittels halb-einfacher Isometrien geben kann.

Hinweis: Betrachten Sie die Untergruppe $\langle a, t\rangle \cong \mathbb{Z}^2$ und wenden Sie den Satz vom flachen Torus an, um einen Widerspruch zu erhalten.

Aufgabe 3 ($\mathrm{Aut}(F_n)$ ist nicht CAT(0))**.** Sei $\mathrm{Aut}(F_n)$ die Automorphismengruppe der freien Gruppe F_n vom Rang n. Zeigen Sie mithilfe von Aufgabe 2, dass es keine eigentliche Wirkung von $\mathrm{Aut}(F_n)$ auf einem CAT(0) Raum mittels halb-einfacher Isometrien geben kann, falls $n \geq 3$.

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $i\colon F_3 \rtimes_\varphi \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(F_3)$ mit $i(a), i(b), i(c)$ Konjugation mit a, b, c und $i(t) = \phi$.

Bitte wenden

Aufgabe 4* (Eine Richtung des Satzes von Bieberbach)**.** Zeigen Sie, dass eine virtuell frei abelsche Gruppe vom Rang n (d.h. es gibt eine Untergruppe von endlichem Index, welche isomorph zu $\mathbb{Z}^n$ ist) eigentlich und kokompakt auf $\mathbb{E}^n$ wirkt.

Hinweis: Verwenden Sie die sogenannte *induzierte Darstellung*: Sei H eine Untergruppe von G von endlichem Index. Dann kann man eine (eigentliche) Wirkung

$$H \to \mathrm{Isom}(X)$$

zu einer (eigentlichen) Wirkung

$$G \to \mathrm{Isom}\left(X^{|G/H|}\right)$$

fortsetzen.

Aufgaben mit Stern $\star$ sollten abgegeben werden, Aufgaben ohne Symbol sollten in der Übung vorgerechnet werden können.

Abgabe bis zum 3. Juli 2015, 10:00 Uhr, in den Briefkasten.