Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie II

Dr. M. Blank/Dr. W. Thumann — Blatt 12 vom 3. Juli 2015

Aufgabe 1* **(**F ist torsionsfrei**).** Zeigen Sie, dass jedes nicht-triviale Element $f \in F$ unendliche Ordnung hat.

Aufgabe 2* **(**Frei abelsche Untergruppen von F**).** Zeigen Sie, dass F eine frei abelsche Untergruppe von unendlichem Rang enthält.

Aufgabe 3 **(**Erzeuger von F**).** Zeigen Sie, dass die Elemente $x_0, x_1 \in F$ (siehe Vorlesung) die ganze Gruppe F erzeugen.

Anleitung:

- Betrachten Sie die Elemente $x_0, x_1, x_2, \ldots \in F$ induktiv definiert durch $x_{n+1} = x_0 x_n x_0^{-1}$ für $n \geq 1$. Falls diese Elemente ganz F erzeugen, dann auch x_0, x_1.
- Ein Element $x \in F$ heiße positiv, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Sei D_2 die dyadische Unterteilung mit Teilungspunkten $\frac{2^k-1}{2^k}$ für $k = 1, \ldots, N$. Dann existiert eine weitere dyadische Unterteilung D_1 so, dass (D_1, D_2) das Element x repräsentiert.
- Man kann jedes Element $x \in F$ schreiben als $x = z^{-1}y$ mit positiven Elementen y, z. Zeigen Sie also, dass man jedes positive Element als Produkt der Elemente x_n schreiben kann. Betrachten Sie hierzu die Wirkung (von links) der Elemente x_n auf positive Elemente y (für kleine n in Abhängigkeit von y).

Aufgabe 4 **(**Abelianisierung von F**).** Zeigen Sie, dass die Abelianisierung $F/[F,F]$ von F isomorph zu $\mathbb{Z}^2$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung

$$\varphi\colon F \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \qquad f \mapsto \bigl(\log_2 f'(0), \log_2 f'(1)\bigr)$$

Aufgaben mit Stern $\star$ sollten abgegeben werden, Aufgaben ohne Symbol sollten in der Übung vorgerechnet werden können.

Abgabe bis zum 10. Juli 2015, 10:00 Uhr, in den Briefkasten.