Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 12 vom 19. Januar 2017

Aufgabe 1 (Determinante)**.** Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Für alle Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(K)$ gilt $\det(A + B) = \det A + \det B$.
2. Für alle $A \in M_{n\times n}(K)$ und alle $\lambda \in K$ gilt $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$.

Aufgabe 2 (Matrizenkalkül)**.** Sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Q}^4 &\longrightarrow \mathbb{Q}^3 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 + 2\cdot x_3 - x_4 \\ -x_1 + 3\cdot x_2 + 2\cdot x_4 \\ 2\cdot x_1 + x_3 - 2\cdot x_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens:

1. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker f$.

   Hinweis. Überprüfen Sie auch, ob Ihr Ergebnis korrekt ist!
2. Für welche $x \in \mathbb{Q}^4$ gilt $f(x) = e_1$?

Aufgabe 3 (XOR-SAT)**.** Das *exklusive Oder* $\oplus$ ist durch die folgende Wahrheitstabelle definiert (und offenbar assoziativ):

A	B	$A \oplus B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Wir betrachten nun das folgende Problem: Kann man die aussagenlogischen Variablen A, B, C, D so mit Wahrheitswerten belegen, dass die Formel

$$\bigl(A \oplus B \oplus C\bigr) \land \bigl(A \oplus (\neg B) \oplus D\bigr) \land \bigl(B \oplus (\neg C) \oplus (\neg D)\bigr)$$

den Wahrheitswert w liefert? Gehen Sie wie folgt vor (dies ist im allgemeinen Fall effizienter als alle Kombinationen durchzuprobieren):

1. Wenn wir $0 \in \mathbb{F}_2$ als „wahr" und $1 \in \mathbb{F}_2$ als „falsch" interpretieren, welche algebraische Beschreibung besitzt dann $\oplus$?
2. Übersetzen Sie die obige Formel in ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{F}_2$ mit vier Variablen und drei Gleichungen (so dass die Lösungen dieses Gleichungssystems genau den Wahrheitsbelegungen entsprechen, unter denen die obige Formel den Wahrheitswert w liefert).
3. Lösen Sie dieses lineare Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.
4. Was bedeutet dies für das ursprüngliche Problem?

Bitte wenden

Aufgabe 4 (schwache Diagonalisierung)**.** Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{m\times n}(K)$. Zeigen Sie: Dann gibt es $S \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit folgender Eigenschaft: Ist

$$B := S \cdot A \cdot T,$$

so gilt für alle $(j,k) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$ mit $j \neq k$, dass

$$B_{j,k} = 0.$$

Hinweis. Führen Sie erst das gründliche Gaußsche Eliminationsverfahren durch und betrachten Sie dann geeignete Spaltenoperationen. Oder Sie verwenden die Theorie der linearen Abbildungen und Basen.

Bonusaufgabe (Homologie von Graphen)**.** Sei $X := (V, E)$ ein Graph mit endlicher Knotenmenge V (Bonusaufgabe von Blatt 9). Dann definieren wir

$$C_0(X) := \mathrm{Abb}(V, \mathbb{F}_2) \quad \text{und} \quad C_1(X) := \mathrm{Abb}(E, \mathbb{F}_2)$$

und die linearen Abbildungen

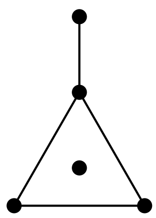
$$\begin{aligned} \partial_0 := 0\colon C_0(X) &\longrightarrow \{0\} \\ \partial_1\colon C_1(X) &\longrightarrow C_0(X) \\ f_{\{v,w\}} &\longmapsto f_w - f_v = f_w + f_v \\ \partial_2 := 0\colon \{0\} &\longrightarrow C_1(X); \end{aligned}$$

dabei ist ∂_1 durch die universelle Eigenschaft von Basen definiert (vgl. Beispiel 3.2.6) und man beachte, dass in $\mathbb{F}_2$ Subtraktion und Addition übereinstimmen. Man bezeichnet dann die Quotientenvektorräume

$$H_0(X) := \ker \partial_0 \big/ \operatorname{im} \partial_1 \quad \text{und} \quad H_1(X) := \ker \partial_1 \big/ \operatorname{im} \partial_2$$

als *Homologie von X*. Wir betrachten nun den Graphen

$$X := \bigl(\{1,2,3,4,5\}, \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\},\{1,4\}\}\bigr).$$



1. Bestimmen Sie eine Basis von $H_0(X)$.
2. Welche geometrische Bedeutung hat $\dim_{\mathbb{F}_2} H_0(X)$?
3. Bestimmen Sie eine Basis von $H_1(X)$.
4. Welche geometrische Bedeutung hat $\dim_{\mathbb{F}_2} H_1(X)$?

Abgabe bis zum 26. Januar 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen