Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 14 vom 2. Februar 2017

Aufgabe 1 (3 × 3-Matrizen und Eigenwerte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Jede Matrix in $M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ ist (über $\mathbb{C}$) diagonalisierbar.
2. Jede Matrix in $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ hat mindestens einen Eigenwert (in $\mathbb{R}$).

Aufgabe 2 (Diagonalisierbarkeit). Untersuchen Sie für die beiden folgenden Matrizen jeweils, ob Diagonalisierbarkeit über $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{F}_2$ vorliegt. Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (Omnidiagonalisierbarkeit). Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ heißt *omnidiagonalisierbar*, wenn für jedes $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Matrix $S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Diagonalgestalt ist. Bestimmen Sie alle omnidiagonalisierbaren Matrizen in $M_{n\times n}(K)$ (und begründen Sie Ihre Antwort).

Aufgabe 4 (Begleitmatrix eines Polynoms). Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$ und sei $p := T^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot T^j \in K[T]$. Wir betrachten dann die Matrix

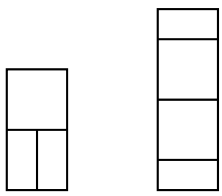
$$M_p := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K).$$

Zeigen Sie, dass $\chi_{M_p} = p$ ist.

Hinweis. Dies lässt sich bequem per vollständiger Induktion über n zeigen.

Bonusaufgabe (Turmbau). Baumeister Babel verfügt über die folgenden Sorten von Bausteinen (mit den Abmessungen 1×2 und 2×2):

Daraus möchte er Türme der Form $n \times 2$ mit $n \in \mathbb{N}$ bauen. Zum Beispiel sind



Babeltürme der Höhe 4 bzw. 6. Finden Sie eine explizite (nicht rekursive) Formel für die Anzahl der Babeltürme gegebener Höhe.

Hinweis. Was hat das mit Linearer Algebra zu tun?

Freiwillige Abgabe (bis zum 9. Februar 2017, 10:00, in die Briefkästen)