# Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Prem Blatt 2 vom 27. Oktober 2016

**Aufgabe 1** (Bild und Urbild). Welche der folgenden Aussagen sind für alle Abbildungen $f\colon X \longrightarrow Y$ von Mengen wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Es gilt für alle $A \subset X$, dass $f^{-1}\bigl(f(A)\bigr) \subset A$.
2. Es gilt für alle $B \subset Y$, dass $f\bigl(f^{-1}(B)\bigr) \subset B$.

**Aufgabe 2** (Injektivität für alle!). Was ist falsch am nachfolgenden „Beweis“? Geben Sie genau an, an welcher Stelle etwas schiefgeht und erklären Sie den Fehler (indem Sie ein Gegenbeispiel für den entsprechenden Beweisschritt angeben)!

*Behauptung.* Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, so ist $f$ injektiv.

*Beweis.* Seien $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$. Also ist $\{x\} \cap \{x'\} = \emptyset$ und wir erhalten

$$f\bigl(\{x\}\bigr) \cap f\bigl(\{x'\}\bigr) = f\bigl(\{x\} \cap \{x'\}\bigr) = f(\emptyset) = \emptyset.$$

Insbesondere ist somit $f(x) \neq f(x')$. Mit Kontraposition folgt daraus, dass die Abbildung $f$ injektiv ist. $\square$

**Aufgabe 3** (Potenzmengen sind „groß“). Sei $X$ eine Menge. Zeigen Sie, dass es *keine* surjektive Abbildung $X \longrightarrow P(X)$ gibt.

*Hinweis.* Sei $f\colon X \longrightarrow P(X)$ eine Abbildung. Liegt $\{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ im Bild von $f$ ?! Argumentieren Sie wie im Russellschen Paradoxon ...

**Aufgabe 4** (universelle Eigenschaft des kartesischen Produkts). Seien $X_1$ und $X_2$ Mengen. Wir sagen, dass eine Menge $P$ zusammen mit den Abbildungen $p_1\colon P \longrightarrow X_1$ und $p_2\colon P \longrightarrow X_2$ die *universelle Eigenschaft des kartesischen Produktes von* $X_1$ *und* $X_2$ erfüllt, wenn folgendes gilt: Für jede Menge $Z$ und alle Abbildungen $f_1\colon Z \longrightarrow X_1$ und $f_2\colon Z \longrightarrow X_2$ gibt es genau eine Abbildung $f\colon Z \longrightarrow P$ mit

$$p_1 \circ f = f_1 \quad \text{und} \quad p_2 \circ f = f_2.$$

Kurz und knapp lässt sich dies im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \\
Z \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, "f_2"'] & P \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\
& X_2
\end{tikzcd}$$

veranschaulichen (dabei ist „$\exists!$“ eine gebräuchliche Abkürzung für „es existiert genau ein ...“).

1. Zeigen Sie, dass $X_1 \times X_2$ zusammen mit den beiden kanonischen Projektionen $\pi_1\colon X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1$ und $\pi_2\colon X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$ die universelle Eigenschaft des kartesischen Produktes von $X_1$ und $X_2$ erfüllt.

   *Hinweis.* Don't panic! Lesen Sie die Definition noch einmal in Ruhe durch. Was ist gegeben? Was ist zu zeigen? Was heißt „genau eine“?

2. Zeigen Sie: Erfüllt die Menge $P$ mit den Abbildungen $p_1\colon P \longrightarrow X_1$ und $p_2\colon P \longrightarrow X_2$ die universelle Eigenschaft des kartesischen Produktes von $X_1$ und $X_2$, so gibt es genau eine Bijektion $f\colon P \longrightarrow X_1 \times X_2$ mit

   $$\pi_1 \circ f = p_1 \quad \text{und} \quad \pi_2 \circ f = p_2.$$

   *Hinweis.* Setzen Sie für „$Z$“ als Testmenge $P$ bzw. $X_1 \times X_2$ ein und Verwenden Sie die Charakterisierung von Bijektivität durch Umkehrabbildungen ...

*Bitte wenden*

**Bonusaufgabe** (Der Satz von Schröder-Bernstein). Seien $X$ und $Y$ Mengen. Zeigen Sie: Gibt es injektive Abbildungen $X \longrightarrow Y$ und $Y \longrightarrow X$, so gibt es bereits eine bijektive Abbildung $X \longrightarrow Y$.

*Hinweis.* Eine Abbildung $h\colon P(X) \longrightarrow P(X)$ heißt *monoton wachsend*, wenn für alle Teilmengen $A, B \subset X$ mit $A \subset B$ gilt, dass

$$h(A) \subset h(B).$$

Eine Teilmenge $A \subset X$ ist ein *Fixpunkt von h*, wenn $h(A) = A$ gilt. Zeigen Sie, dass $\bigcup\bigl\{B \subset X \bigm| B \subset h(B)\bigr\} = \bigl\{x \bigm| \exists_{B \in P(X)} \quad (B \subset h(B)) \wedge (x \in B)\bigr\}$ ein Fixpunkt von $h$ ist.

Betrachten Sie dann zu $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow X$ die Abbildung

$$\begin{aligned} h\colon P(X) &\longrightarrow P(X) \\ A &\longmapsto X \setminus g\bigl(Y \setminus f(A)\bigr). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $h$ monoton wachsend ist und betrachten Sie einen Fixpunkt ...

---

Abgabe bis zum 3. November 2016, 10:00 Uhr, in die Briefkästen