Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Prem — Blatt 3 vom 3. November 2016

Aufgabe 1 (Relationen). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Jede symmetrische Relation ist transitiv.
2. Jede transitive Relation ist reflexiv.

Aufgabe 2 (Vererbung von Surjektivität). Seien X, Y, Z Mengen und seien $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Zeigen Sie die Behauptung

Ist $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ surjektiv, so ist auch $g\colon Y \longrightarrow Z$ surjektiv.

auf die folgenden beiden Arten:

1. Zeigen Sie diese Aussage zunächst elementweise.
2. Zeigen Sie die Aussage dann nochmal über die Charakterisierung von Surjektivität durch die Existenz eines Spalts.

Aufgabe 3 (Kommutativität der Addition). Zeigen Sie wie folgt die Kommutativität der induktiv definierten Addition auf $\mathbb{N}$; Sie dürfen dabei verwenden, dass wir die Assoziativität bereits bewiesen haben. Bearbeiten Sie zwei der folgenden drei Aufgabenteile:

1. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 + n = n$.
2. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n + 1 = 1 + n$.
3. Zeigen Sie: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $m + n = n + m$.

Aufgabe 4 (Äquivalenzklassen). Sei X eine Menge und sei „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation auf X.

1. Was ist falsch am nachfolgenden „Beweis“? Geben Sie genau an, an welcher Stelle etwas schiefgeht und erklären Sie den Fehler!

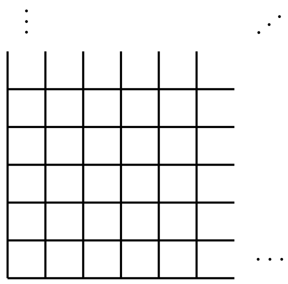
   Behauptung. Für alle $x \in X$ ist $[x] = X$.

   Beweis. Wegen $[x] \subset X$ genügt es zu zeigen, dass $X \subset [x]$ ist. Sei $y \in X$. Wir zeigen, dass $y \in [x]$ gilt: Sei dazu $A := [x] \cap [y]$ und sei $z \in A$. Nach Definition gilt dann $x \sim z$ und $y \sim z$. Da die Relation „$\sim$“ symmetrisch ist, folgt $z \sim y$. Mit der Transitivität erhalten wir aus $x \sim z$ und $z \sim y$, dass $x \sim y$. Also ist $y \in [x]$. □

2. Zeigen Sie: Für alle $x, y \in X$ gilt $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$. Illustrieren Sie Ihre Argumente mit geeigneten Skizzen!
3. Zeigen Sie: Es gilt $\bigcup(X/\sim) = X$.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Infinisudoku)**.** Zeigen Sie: Man kann das nach rechts und oben unendliche Gitter



so mit natürlichen Zahlen füllen, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jede natürliche Zahl genau einmal auftritt.
Hinweis. Versuchen Sie zunächst, das Problem systematisch für kleine Quadrate zu lösen!

Abgabe bis zum 10. November 2016, 10:00 Uhr, in die Briefkästen