Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Prem Blatt 4 vom 10. November 2016

Aufgabe 1 (Rechnen in Gruppen). Welche der folgenden Aussagen sind in allen Gruppen $(G, \cdot)$ wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Für alle $g, h \in G$ gilt $(g \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot g^{-1}$.
2. Für alle $g, h \in G$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(g \cdot h \cdot g^{-1})^n = g \cdot h^n \cdot g^{-1}$.

   Hinweis. Ist $k \in G$, so definieren wir k^0 als neutrales Element von G und induktiv $k^{n+1} := k^n \cdot k$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (symmetrische Gruppen). Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe S_X genau dann abelsch ist, wenn X höchstens zwei verschiedene Elemente enthält.
Hinweis. Es ist eine Äquivalenz („genau dann ..., wenn ...“) zu zeigen. In welche beiden Teilprobleme zerlegt sich die Aufgabe daher auf natürliche Weise? Rechnen Sie zunächst ein paar Beispiele, um der allgemeinen Lösung auf die Spur zu kommen!

Aufgabe 3 (Wurzelkörper). Sei

$$K := \{a + i \cdot \sqrt{2016} \cdot b \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}.$$

1. Was ist falsch am nachfolgenden „Beweis“? Geben Sie genau an, an welcher Stelle etwas schiefgeht und erklären Sie den Fehler!

   Behauptung. Die Menge K bildet bezüglich der von $\mathbb{C}$ auf K eingeschränkten Addition und Multiplikation einen Körper.

   Beweis. Nach Konstruktion ist $0 \in K$ und $1 \in K$.
   Einfaches Nachrechnen zeigt, dass
   $$\forall_{x,y \in K} \quad x + y \in K.$$
   Wegen $i \cdot \sqrt{2016} \cdot i \cdot \sqrt{2016} = -2016$ folgt außerdem durch Ausmultiplizieren, dass
   $$\forall_{x,y \in K} \quad x \cdot y \in K.$$
   Also schränken sich Addition und Multiplikation von $\mathbb{C}$ tatsächlich zu Verknüpfungen $K \times K \longrightarrow K$ ein.
   Da $\mathbb{C}$ ein Körper ist und $K \subset \mathbb{C}$ gilt, folgt somit, dass sich die Körpereigenschaften von $\mathbb{C}$ auf K vererben. Also ist auch K ein Körper. $\square$

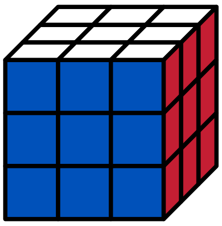
2. Zeigen Sie, dass K tatsächlich ein Körper ist.

Aufgabe 4 (kleiner Körper). Zeigen Sie, dass es einen Körper gibt, der genau vier Elemente enthält.
Hinweis. Die Charakteristik eines solchen Körpers ist 2. Versuchen Sie, Schritt für Schritt die Verknüpfungstabellen für Addition bzw. Multiplikation zu füllen. Beginnen Sie mit den Teilen, die direkt aus den Axiomen folgen, und hangeln Sie sich dann vorwärts, um einen geeigneten Kandidaten zu finden.

Beim Aufschreiben der Lösung sollten Sie jedoch umgekehrt vorgehen: Präsentieren Sie Ihre fertigen Verknüpfungstabellen und begründen Sie dann, warum diese tatsächlich die Körperaxiome erfüllen.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Zauberwürfel). Erklären Sie, wie man die zulässigen Züge am Zauberwürfel (https://eu.rubiks.com/about/the-history-of-the-rubiks-cube) durch eine Gruppe beschreiben kann.



Bonusaufgabe (Zahlen; nur für Lehrämtler! (als optionale Alternative zum Zauberwürfel)).

1. Wie werden in der Schule (Gymnasium, Bayern) die natürlichen, ganzen, rationalen, reellen Zahlen eingeführt?
2. Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede gibt es im Vergleich zu unserem Vorgehen?

Es genügt, wenn Sie die wesentlichen Punkte kurz skizzieren!

Abgabe bis zum 17. November 2016, 10:00 Uhr, in die Briefkästen