Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 7 vom 1. Dezember 2016

Aufgabe 1 (Dimensionen von Durchschnitten). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Es gibt zweidimensionale Untervektorräume U, W von $\mathbb{R}^3$ mit
$$\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 0.$$
2. Es gibt zweidimensionale Untervektorräume U, W von $\mathbb{R}^3$ mit
$$\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 2.$$

Aufgabe 2 (kleine Vektorräume?!). Zeigen Sie, dass es *keinen* $\mathbb{F}_2$-Vektorraum gibt, der genau 2016 Elemente enthält.
Hinweis. Im Falle eine Falles, löst eine Basis wirklich alles.

Aufgabe 3 (Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$). Wir betrachten die Teilmenge
$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = x_3 \right\}$$
von $\mathbb{R}^3$.

1. Skizzieren Sie diese Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ und zeigen Sie, dass es sich dabei um einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ handelt.
2. Was ist $\dim_{\mathbb{R}} U$? Begründen Sie Ihre Antwort!

   Hinweis. Wenn man die Resultate aus der Vorlesung geschickt einsetzt, muss man fast gar nichts rechnen.

Aufgabe 4 (Dimension von Untervektorräumen). Sei K ein Körper, sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum.

1. Zeigen Sie, dass U endlich erzeugt ist.
2. Zeigen Sie: Ist $U \neq V$, so gilt $\dim_K U < \dim_K V$.

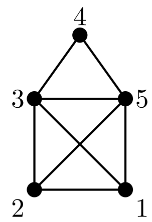
   Hinweis. Sie können das Ergebnis des ersten Teils natürlich für die Lösung des zweiten Teils verwenden, auch wenn Sie den ersten Teil nicht gelöst haben.

Hinweis. Es handelt sich hierbei um Proposition 3.4.4 aus der Vorlesung; diese Proposition dürfen Sie also natürlich *nicht* für die Lösung der Aufgabe verwenden.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Vereinigungen von Unterräumen). Sei K ein unendlicher Körper und sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass V *nicht* als Vereinigung von endlich vielen echten Untervektorräumen geschrieben werden kann.

Bonusaufgabe (Nikolausaufgabe). Der Nikolaus möchte sein zweidimensionales Haus



etwas höherdimensional gestalten, damit endlich auch sein üppiger Bauch reinpasst. Er überlegt daher, was die maximal mögliche Dimension ist, ohne die Auflagen des Denkmalschutzes zu verletzen ...

Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Eine Menge

$$\{v_{12}, v_{13}, v_{15}, v_{23}, v_{25}, v_{34}, v_{35}, v_{45}\} \subset V$$

von Vektoren in V ist eine *Nikolaushausmenge*, wenn die Gleichungen

$$\begin{aligned} v_{12} + v_{23} &= v_{13} \\ v_{12} + v_{25} &= v_{15} \\ v_{23} + v_{35} &= v_{25} \\ v_{13} + v_{35} &= v_{15} \\ v_{34} + v_{45} &= v_{35} \end{aligned}$$

in V erfüllt sind.

1. Was haben diese Gleichungen mit dem Haus des Nikolaus zu tun?
2. Was ist die maximal mögliche Dimension $\dim_K \operatorname{Span}_K N$ für Nikolaushausmengen N ? Begründen Sie Ihre Antwort!

Abgabe bis zum 8. Dezember 2016, 10:00 Uhr, in die Briefkästen