Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 8 vom 8. Dezember 2016

Aufgabe 1 (Linearität vs. Bijektivität)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Jede lineare Abbildung zwischen Vektorräumen ist bijektiv.
2. Jede bijektive Abbildung zwischen Vektorräumen ist linear.

Aufgabe 2 (Vererbungseigenschaften linearer Abbildungen)**.** Sei K ein Körper und seien V, W, X Vektorräume über K.

1. Zeigen Sie: Sind $f, g \colon V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen, so ist auch die punktweise Summe $f + g \colon V \longrightarrow W$ linear.
2. Zeigen Sie: Sind $f \colon V \longrightarrow W$ und $g \colon W \longrightarrow X$ lineare Abbildungen, so ist auch die Komposition $g \circ f \colon V \longrightarrow X$ linear.

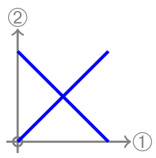
Aufgabe 3 (komplementäre Untervektorräume und lineare Abbildungen)**.** Wir betrachten den Untervektorraum

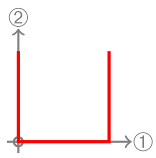
$$U := \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$.

1. Bestimmen Sie einen zu U komplementären Untervektorraum in $\mathbb{R}^3$ (und begründen Sie Ihre Antwort). Illustrieren Sie diese Situation durch eine geeignete Skizze.
2. Geben Sie eine lineare Abbildung $f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ an, die nicht die Nullabbildung ist, aber
$$\forall_{u \in U} \quad f(u) = 0$$
erfüllt (und begründen Sie Ihre Antwort).

Aufgabe 4 (ein X für ein U?!)**.** Wir betrachten die Teilmengen





$$X := \{t \cdot (e_1 + e_2) \mid t \in [0,1]\} \cup \{e_1 + t \cdot (e_2 - e_1) \mid t \in [0,1]\}$$
$$U := \{t \cdot e_1 \mid t \in [0,1]\} \cup \{t \cdot e_2 \mid t \in [0,1]\} \cup \{e_1 + t \cdot e_2 \mid t \in [0,1]\}$$

im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass es *keine* lineare Abbildung $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(X) = U$ gibt.

Hinweis. Was machen lineare Abbildungen mit (affinen) Geraden? Welche (affinen) Geraden sollte man wohl betrachten?

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Nullfolgen vergessen!). Sei V die Menge aller Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$; diese Menge bildet bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum, genauer gesagt einen Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$. Sei U die Menge aller Nullfolgen in $\mathbb{Q}$. Diese Menge ist ein Untervektorraum des $\mathbb{Q}$-Vektorraums V. Somit erhalten wir den zugehörigen Quotientenvektorraum V/U.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\begin{aligned} \bullet : V/U \times V/U &\longrightarrow V/U \\ \big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) &\longmapsto (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$
wohldefiniert ist.

2. Zeigen Sie, dass $(V/U, +, \bullet)$ ein Körper ist. Es genügt, wenn Sie den Beweis für die Existenz von multiplikativen Inversen im Detail angeben und für die anderen Eigenschaften nur eine kurze Begründung angeben.

Hinweis. Diese Konstruktion ist eine Möglichkeit, „Grenzwerte zu $\mathbb{Q}$ hinzuzufügen“. Man kann diesen Körper mit einer geeigneten Anordnung versehen und erhält auf diese Weise dann eine Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$.

Abgabe bis zum 15. Dezember 2016, 10:00 Uhr, in die Briefkästen