Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 9 vom 15. Dezember 2016

Aufgabe 1 (Potenzen von linearen Abbildungen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Es gibt eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ und $f \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, aber $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
2. Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linear und $f \circ f = 0$, so ist f die Nullabbildung.

Hinweis. Können Sie die entsprechenden Fragen für Matrizen beantworten?

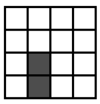
Aufgabe 2 (Matrixmultiplikation)**.** Sei K ein Körper und seien $a, b, c, d, \lambda \in K$.

1. Berechnen Sie die Matrizen (in $M_{2\times 2}(K)$)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
2. Was passiert mit den Zeilen? Beschreiben Sie die Ergebnisse des ersten Teils jeweils in einem einprägsamen Satz.

Aufgabe 3 (Fibonacci-Zahlen)**.** Die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *Fibonacci-Zahlen* ist die rekursiv durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$
definierte Folge natürlicher Zahlen. Die ersten Folgenglieder sind also 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt (in $M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (fiat lux?)**.** Wir betrachten eine 4×4-Anordnung von Lampen; es gibt Lichtschalter, mit denen man alle Lampen in einer Zeile, Spalte oder (Neben)Diagonalen umschalten kann. Wir modellieren den Zustand der Lampen durch eine Matrix in $M_{4\times 4}(\mathbb{F}_2)$. Dabei bedeute 0 als Koeffizient, dass die entsprechende Lampe aus ist, und 1, dass die entsprechende Lampe leuchtet.

1. Wie kann man den Effekt der Lichtschalter durch Addition mit geeigneten Matrizen aus $M_{4\times 4}(\mathbb{F}_2)$ beschreiben?
2. Bestimmen Sie $I(S)$ für alle Lichtschaltermatrizen S aus dem ersten Teil, wobei
$$\begin{aligned} I\colon M_{4\times 4}(\mathbb{F}_2) &\longrightarrow \mathbb{F}_2 \\ A &\longmapsto A_{12} + A_{13} + A_{21} + A_{31} + A_{42} + A_{43} + A_{24} + A_{34}. \end{aligned}$$
3. Kann man in der abgebildeten Situation mit diesen Lichtschaltern erreichen, dass alle Lampen gleichzeitig leuchten? Begründen Sie Ihre Antwort!



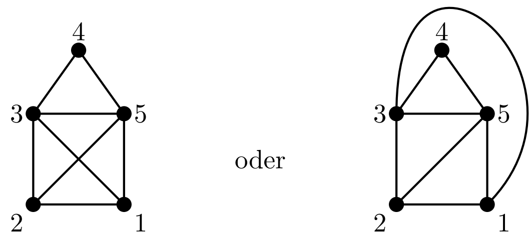
Hinweis. Verwenden Sie I !

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Adjazenzmatrizen). Ein *Graph* ist ein Paar (V, E), bestehend aus einer Menge V (den sogenannten *Knoten*) und einer Menge E von zweielementigen Teilmengen von V (den sogenannten *Kanten*). Zum Beispiel können wir den *Nikolaushausgraphen*

$$\big(\{1,\dots,5\}, \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}\big)$$

wie folgt veranschaulichen (der Verlauf der Kanten ist nicht relevant; wichtig ist nur, welche Knoten durch Kanten verbunden sind und welche nicht):



Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $X = (\{1,\dots,n\}, E)$ ein Graph mit Knotenmenge $\{1,\dots,n\}$. Dann wird die *Adjazenzmatrix* $(a_{jk})_{j,k} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *von* X durch

$$a_{jk} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \{j,k\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $j, k \in \{1,\dots,n\}$ definiert. Die Adjazenzmatrix von X beschreibt also, welche Knoten in X durch eine Kante verbunden sind und welche nicht.

1. Bestimmen Sie die Adjazenzmatrix des Nikolaushausgraphen.
2. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ die Adjazenzmatrix eines Graphen mit der Knotenmenge $\{1,\dots,n\}$ und sei $d \in \mathbb{N}$. Welche geometrische Bedeutung hat das Produkt A^d ? Begründen Sie Ihre Antwort!

Abgabe bis zum 22. Dezember 2016, 10:00 Uhr, in die Briefkästen