Klausur zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — 14. Februar 2017

Name: — Vorname:

Matrikelnummer: □□□□□□□ — Übungsleiter:

– Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.

– Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

– Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

– Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.

– Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.

– Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	9	9	9	9	9	10	5	60
erreichte Punkte								

Note: — Unterschrift:

Aufgabe 1 ($3 + 3 + 3 = 9$ Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Es gilt
$$\exists_{x \in V} \quad \forall_{y \in V} \quad x + y = y.$$

2. Es gilt
$$\forall_{\lambda \in K} \quad \exists_{x \in V} \quad \lambda \cdot x = 0.$$

3. Es gilt
$$\forall_{x \in V} \quad \Big(\big(\exists_{y \in V} \quad x + y = 0 \big) \Longrightarrow x = 0 \Big).$$

Aufgabe 2 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie in V. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist $v_j \neq 0$.
2. Ist $w \in V \setminus \{0\}$, so ist auch die Familie $(v_1 + w, \ldots, v_n + w)$ linear unabhängig.
3. Es gilt $\dim_K\bigl(\mathrm{Span}_K(\{v_1\}) \cap \mathrm{Span}_K(\{v_2, \ldots, v_n\})\bigr) = 0$.

Aufgabe 3 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Ist $0 \in \ker f$, so ist f injektiv.
2. Ist $f \circ f$ die Nullabbildung, so ist auch f die Nullabbildung
3. Jeder Eigenvektor von f ist ein Eigenvektor von $f \circ f$.

Aufgabe 4 $(1 + 4 + 1 + 3 = 9$ Punkte$)$**.** Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit $n := \dim_K V > 0$ und sei $f \colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus.

1. Wie ist die Determinante von f definiert?
2. Warum ist diese Definition der Determinante von f unabhängig von den getroffenen Wahlen? Erklären Sie die wichtigsten Beweisschritte!
3. Nennen Sie eine Anwendung der Determinante von Endomorphismen.
4. Wie lautet der Satz über die Leibniz-Formel für die Determinante von Matrizen und wie ist die Verknüpfung in der darin auftretenden Gruppe definiert?

Aufgabe 5 $(3 + 3 + 3 = 9$ Punkte$)$**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

und sei $f := L(A)\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung.

1. Welche geometrische Interpretation besitzt die lineare Abbildung f ?
2. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$ von f bezüglich der Basis $B := (e_2, e_1 + e_2)$ von $\mathbb{R}^2$.
3. Gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\det(A^n) = 2017$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 6 (3 + 2 + 5 = 10 Punkte)**.** Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1/3 \cdot x_3 \\ x_1 + x_2 - 1/3 \cdot x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie die Menge

$$f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

   mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

2. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3/\operatorname{im} f)$.

3. Ist der Endomorphismus f (über $\mathbb{C}$) diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 7 (5 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbare Matrix mit $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie, dass es dann eine Matrix $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit

$$B^2 = A$$

gibt.