Wiederholungsklausur zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig 20. April 2017

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	9	9	9	9	10	9	5	60
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 ($3+3+3=9$ Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Es gilt
$$\forall_{x\in V} \quad \exists_{y\in V} \quad x+y=y.$$

2. Es gilt
$$\forall_{\lambda\in K} \quad \exists_{x\in V} \quad \lambda\cdot x=-x.$$

3. Es gilt
$$\forall_{\lambda\in K} \quad \Big(\big(\exists_{x\in V} \quad \lambda\cdot x=x\big) \Longrightarrow \lambda=1\Big).$$

Aufgabe 2 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum, sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie in V. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ ist $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 \neq 0$.
2. Ist $\lambda \in K \setminus \{0\}$, so ist auch die Familie $(\lambda \cdot v_1, \dots, \lambda \cdot v_n)$ linear unabhängig.
3. Es gilt $\dim_K\bigl(\mathrm{Span}_K(\{v_1, \dots, v_n\})\bigr) > \dim_K\bigl(\mathrm{Span}_K(\{v_1, \dots, v_{n-1}\})\bigr)$.

Aufgabe 3 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f: V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Es gilt $\operatorname{im} f \subset \ker f$.
2. Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, so ist auch $f(U) \subset V$ ein Untervektorraum.
3. Sei

$$\begin{aligned} F: V &\longrightarrow V/\operatorname{im} f \\ x &\longmapsto f(x) + \operatorname{im} f. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x \in V$, dass $F(x) = 0 + \operatorname{im} f$.

Aufgabe 4 ($1 + 3 + 4 + 1 = 9$ Punkte)**.**

1. Wie ist der Begriff „Basis eines Vektorraums“ definiert?
2. Formulieren Sie den Ergänzungssatz für Basen.
3. Skizzieren Sie die wesentlichen Schritte des Beweises des Ergänzungssatzes.
4. Nennen Sie eine Anwendung des Ergänzungssatzes.

Aufgabe 5 $(4 + 1 + 5 = 10$ Punkte$)$**.** Wir betrachten die Abbildung

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{Q}^3 &\longrightarrow \mathbb{Q}^3 \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 + x_3 \\ -1/2 \cdot x_1 + x_2 - 1/2 \cdot x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

1. Bestimmen Sie die Menge $\left\{x \in \mathbb{Q}^3 \;\middle|\; f \circ f(x) = 0\right\}$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.
2. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}}(\operatorname{im}(f \circ f))$.
3. Ist der Endomorphismus f über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 6 $(5+1+3=9$ Punkte$)$**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

und sei $f := L(A)\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung.

1. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{B,C}(f)$ von f bezüglich der Basen $B := (e_1, e_2 + e_3, e_1 + e_3)$ und $C := (e_1 + e_2, e_1)$ von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$.

2. Was sagt die letzte Spalte von $M_{B,C}(f)$ über f aus?

3. Zeigen Sie: Ist $X \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, so gilt $\det(X \cdot A) \neq 1$.

Aufgabe 7 (5 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine Matrix, deren Koeffizienten alle in $\mathbb{Z}$ liegen. Zeigen Sie: Ist $\det A = 1$, so gibt es einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, dessen Koeffizienten alle in $\mathbb{Z}$ liegen, mit

$$A \cdot x = e_1.$$

Hinweis. Welche Methoden kennen Sie, um inverse Matrizen zu bestimmen?