Wiederholungsklausur zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig 20. April 2017

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	9	9	9	9	10	9	5	60
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 ($3+3+3 = 9$ Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Es gilt
$$\forall_{x\in V} \quad \exists_{y \in V} \quad x + y = y.$$
2. Es gilt
$$\forall_{\lambda\in K} \quad \exists_{x \in V} \quad \lambda \cdot x = -x.$$
3. Es gilt
$$\forall_{\lambda\in K} \quad \Bigl(\bigl(\exists_{x \in V} \quad \lambda \cdot x = x\bigr) \Longrightarrow \lambda = 1\Bigr).$$

Lösung:

1. Diese Aussage ist im allgemeinen falsch, denn: Sei $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}$ und $x := 1 \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$$\forall_{y\in\mathbb{R}} \quad x + y = 1 + y \neq y.$$
2. Diese Aussage ist wahr, denn: Für alle $\lambda \in K$ ist
$$\lambda \cdot 0 = 0 = -0.$$
3. Diese Aussage ist im allgemeinen falsch, denn: Sei $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}$ und $\lambda := 0$. Dann ist $\lambda \cdot 0 = 0$, aber $\lambda \neq 1$.

Aufgabe 2 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum, sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie in V. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ ist $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 \neq 0$.
2. Ist $\lambda \in K \setminus \{0\}$, so ist auch die Familie $(\lambda \cdot v_1, \ldots, \lambda \cdot v_n)$ linear unabhängig.
3. Es gilt $\dim_K\bigl(\mathrm{Span}_K(\{v_1, \ldots, v_n\})\bigr) > \dim_K\bigl(\mathrm{Span}_K(\{v_1, \ldots, v_{n-1}\})\bigr)$.

Lösung:

1. Diese Aussage ist falsch, denn: Für $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ gilt
$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 = 0 + 0 = 0.$$
2. Diese Aussage ist wahr, denn: Seien $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ mit $\sum_{j=1}^n \mu_j \cdot \lambda \cdot v_j = 0$. Dann ist
$$\lambda \cdot \sum_{j=1}^n \mu_j \cdot v_j = \sum_{j=1}^n \mu_j \cdot \lambda \cdot v_j = 0.$$
Wegen $\lambda \neq 0$ folgt daraus $\sum_{j=1}^n \mu_j \cdot v_j = 0$. Da die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ nach Voraussetzung linear unabhängig ist, erhalten wir somit $\mu_1 = 0, \ldots, \mu_n = 0$.
3. Diese Aussage ist wahr, denn: Da $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist, ist die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $\mathrm{Span}_K(\{v_1, \ldots, v_n\})$.

   Da die Teilfamilie $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ notwendigerweise auch linear unabhängig ist, ist diese eine Basis von $\mathrm{Span}_K(\{v_1, \ldots, v_{n-1}\})$. Also ist
$$\dim_K \mathrm{Span}_K(\{v_1, \ldots, v_n\}) = n > n - 1 = \dim_K \mathrm{Span}_K(\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}).$$

Aufgabe 3 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Es gilt $\operatorname{im} f \subset \ker f$.
2. Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, so ist auch $f(U) \subset V$ ein Untervektorraum.
3. Sei
$$\begin{aligned} F\colon V &\longrightarrow V/\operatorname{im} f \\ x &\longmapsto f(x) + \operatorname{im} f. \end{aligned}$$
Dann gilt für alle $x \in V$, dass $F(x) = 0 + \operatorname{im} f$.

Lösung:

1. Diese Aussage ist im allgemeinen falsch, denn: Sei $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}$ und $f := \operatorname{id}_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $\operatorname{im} f = \mathbb{R}$, aber $\ker f = \{0\}$. Also ist $\operatorname{im} f \not\subset \ker f$.
2. Diese Aussage ist wahr, denn:
   - Es ist $f(U) \neq \emptyset$, da $0 \in U$ und daher $f(0) \in f(U)$.
   - Die Menge $f(U)$ ist unter Addition abgeschlossen, denn: Seien $y, y' \in f(U)$, d.h. es gibt $x, x' \in U$ mit $y = f(x)$ und $y' = f(x')$. da U ein Untervektorraum ist, ist $x + x' \in U$, und damit (da f linear ist)
   $$y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x') \in f(U).$$
   - Analog zeigt man, dass $f(U)$ unter Skalarmultiplikation abgeschlossen ist.
3. Diese Aussage ist wahr, denn: Für alle $x \in V$ folgt wegen $f(x) \in \operatorname{im} f$, dass $F(x) = f(x) + \operatorname{im} f = 0 + \operatorname{im} f$.

Aufgabe 4 ($1 + 3 + 4 + 1 = 9$ Punkte)**.**

1. Wie ist der Begriff „Basis eines Vektorraums“ definiert?
2. Formulieren Sie den Ergänzungssatz für Basen.
3. Skizzieren Sie die wesentlichen Schritte des Beweises des Ergänzungssatzes.
4. Nennen Sie eine Anwendung des Ergänzungssatzes.

Lösung:

1. Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V ist eine *Basis von V*, wenn
   - die Familie $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig ist
   - und $\{v_i \mid i \in I\}$ ein Erzeugendensystem von V ist.
2. *Ergänzungssatz.* Sei K ein Körper, sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und sei $(w_1, \dots, w_m)$ eine linear unabhängige Familie in V. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{\geq m}$ und Vektoren $v_{m+1}, \dots, v_n$, so dass $(w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von V ist.
3. Man zeigt zunächst mit anderen Methoden, dass V eine endliche Basis besitzt.

   Auf eine solche endliche Basis und die gegebene linear unabhängige Familie $(w_1, \dots, w_m)$ wenden wir den iterierten Austauschsatz an und erhalten so eine Basis von V von der gewünschten Form.
4. Zum Beispiel kann der Ergänzungssatz verwendet werden, um die Dimensionsformel für Untervektorräume oder die Existenz komplementärer Untervektorräume zu beweisen.

Aufgabe 5 $(4 + 1 + 5 = 10$ Punkte). Wir betrachten die Abbildung

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{Q}^3 &\longrightarrow \mathbb{Q}^3 \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 + x_3 \\ -1/2 \cdot x_1 + x_2 - 1/2 \cdot x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

1. Bestimmen Sie die Menge $\{x \in \mathbb{Q}^3 \mid f \circ f(x) = 0\}$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.
2. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}}(\operatorname{im}(f \circ f))$.
3. Ist der Endomorphismus f über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung: Es gilt (die Spalten sind die Bilder der Standardeinheitsvektoren ...)

$$
M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

1. Sei $A := M(f \circ f)$. Dann ist

   $$
   \{x \in \mathbb{Q}^3 \mid f \circ f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{Q}^3 \mid M(f \circ f) \cdot x = 0\} = V(A, 0).
   $$

   Dabei ist

   $$
   \begin{aligned}
   M(f \circ f) &= M(f) \cdot M(f) \\
   &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
   &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -3/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
   \end{aligned}
   $$

   und mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren (s.u.) folgt $V(A, 0) = \{0\}$.

Das Gaußsche Eliminationsverfahren liefert:

$$\text{Pivot?} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{4} & 0 & 3 & 0 \\ -3/2 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{1/4\cdot(1)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 3/4 & 0 \\ -3/2 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)+3/2\cdot(1)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & -9/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{Pivot?} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -9/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{Pivot?} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -9/8 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right)$$

Der linke Teil ist nun in Zeilenstufenform und das Verfahren endet an dieser Stelle. Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir somit $V(A, 0) = \{0\}$.

2. Mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen und dem ersten Teil folgt

$$\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{im}(f \circ f) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^3 - \dim_{\mathbb{Q}} \ker(f \circ f) = 3 - 0 = 3.$$

   [Alternativ kann man zum Beispiel auch den Spaltenrang von $M(f \circ f)$ von Hand bestimmen oder über $\det M(f \circ f)$ argumentieren.]

3. Der Endomorphismus f ist über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar, denn: Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte (bzw. das Spektrum) von f über das charakteristische Polynom von f. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \chi_f = \chi_{M(f)} &= \det\bigl(T \cdot I_3 - M(f)\bigr) \\ &= \det \begin{pmatrix} T-2 & 0 & -1 \\ 1/2 & T-1 & 1/2 \\ 0 & 0 & T-1 \end{pmatrix} = (T-1)\cdot(T-2)\cdot(T-1). \end{aligned}$$

Die Nullstellen von χ_f sind somit 1 und 2. Also ist $\sigma_{\mathbb{Q}}(f) = \{1, 2\}$.

Wir bestimmen nun die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von f:

- Eigenwert 1: Es ist nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Eig}_1(f) &= \dim_{\mathbb{Q}} V\big(I_3 - M(f), 0\big) = 3 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3 - 1 = 2.\end{aligned}$$

  [Alternativ kann man hier auch die Dimension über das Gaußsche Eliminationsverfahren bestimmen.]

- Eigenwert 2: Da 2 ein Eigenwert ist, ist $\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Eig}_2(f) \geq 1$.

  [Alternativ kann man natürlich den Eigenraum bzw. dessen Dimension explizit berechnen.]

Also ist $\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Eig}_1(f) + \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Eig}_2(f) \geq 3 = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^3$ und somit ist f über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar.

Aufgabe 6 ($5 + 1 + 3 = 9$ Punkte)**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

und sei $f := L(A)\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung.

1. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{B,C}(f)$ von f bezüglich der Basen $B := (e_1, e_2 + e_3, e_1 + e_3)$ und $C := (e_1 + e_2, e_1)$ von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$.

2. Was sagt die letzte Spalte von $M_{B,C}(f)$ über f aus?

3. Zeigen Sie: Ist $X \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, so gilt $\det(X \cdot A) \neq 1$.

Lösung:

1. Es gilt (nach Definition von f und den Basen B bzw. C)

$$\begin{aligned} M_{B,C}(f) &= M_C^{-1} \cdot M(f) \cdot M_B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Da die letzte/dritte Spalte von $M_{B,C}(f)$ der Nullvektor ist, wird der dritte Basisvektor von B (also $e_1 + e_3$) auf 0 abgebildet (Die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren!). Somit ist auch $\mathbb{R} \cdot (e_1 + e_3) \subset \ker f$.

3. Ist $X \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, so ist $X \cdot A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *nicht* invertierbar, denn: Sei $g := L(X)\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Dann ist (wegen der Dimensionsformel für lineare Abbildungen)

$$\operatorname{rg}(X \cdot A) = \operatorname{rg}\bigl(L(g) \circ L(f)\bigr) \leq \operatorname{rg} L(g) \leq 2.$$

   Also ist $X \cdot A$ nicht invertierbar, und damit $\det(X \cdot A) = 0 \neq 1$.

   Alternativ kann man auch $\det(X \cdot A)$ in den Koeffizienten von X ausdrücken und nachrechnen, dass das Ergebnis 0 ist.

Aufgabe 7 (5 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine Matrix, deren Koeffizienten alle in $\mathbb{Z}$ liegen. Zeigen Sie: Ist $\det A = 1$, so gibt es einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, dessen Koeffizienten alle in $\mathbb{Z}$ liegen, mit

$$A \cdot x = e_1.$$

Hinweis. Welche Methoden kennen Sie, um inverse Matrizen zu bestimmen?

Lösung: Nach der Cramerschen Regel ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot B,$$

wobei $B = ((-1)^{j+k} \cdot \det A[j,k])^{\mathsf{T}}_{j,k}$. Wegen $\det A = 1$ ist sogar

$$A^{-1} = B.$$

Da A nur ganzzahlige Koeffizienten besitzt, haben auch die Matrizen, die durch Streichen einer Zeile/Spalte aus A entstehen nur ganzzahlige Koeffizienten.

Mit der Leibnizformel folgt, dass die Determinanten solcher Matrizen auch ganzzahlig sind. Also ist $A[j,k]$ für alle $j,k \in \{1,\dots,n\}$ ganzzahlig. Damit sind die Koeffizienten von B bzw. A^{-1} ganzzahlig.

Also sind auch die Koeffizienten des Vektors

$$x := B \cdot e_1$$

ganzzahlig und nach Konstruktion gilt

$$A \cdot x = A \cdot B \cdot e_1 = I_n \cdot e_1 = e_1.$$