Probeklausur zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig 6. Februar 2017

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	9	9	9	9	9	9	6	60
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 ($3 + 3 + 3 = 9$ Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Es gilt
$$\forall_{x,y \in V} \quad \exists_{z \in V} \quad x = y + z.$$

2. Es gilt
$$\forall_{x,y \in V \setminus \{0\}} \quad \exists_{\lambda \in K} \quad x = \lambda \cdot y.$$

3. Es gilt
$$\forall_{x \in V} \quad \Big(\big(\forall_{\lambda \in K} \quad \lambda \cdot x = 0 \big) \Longrightarrow x = 0 \Big).$$

Aufgabe 2 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie in V. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Dann ist $(v_1 + v_2, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie in V.
2. Es gilt $\dim_K V = n$.
3. Für jeden Vektor $w \in V \setminus \{0\}$ ist die Familie $(w, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ in V linear unabhängig.

Aufgabe 3 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Für alle $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$ gilt $v - v' \in \ker f$.
2. Ist $w \in W$, so ist die Menge $f^{-1}(\{w\}) \subset V$ ein Untervektorraum von V.
3. Sei $U := \operatorname{im} f \subset W$. Dann ist die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} g\colon V &\longrightarrow W/U \\ v &\longmapsto f(v) + U \end{aligned}$$

surjektiv.

Aufgabe 4 ($1 + 3 + 4 + 1 = 9$ Punkte)**.**

1. Wie ist die Dimension eines endlich erzeugten Vektorraums definiert?
2. Formulieren Sie die Dimensionsformel für lineare Abbildungen (von endlich-dimensionalen Vektorräumen).
3. Skizzieren Sie die wesentlichen Schritte des Beweises für die Dimensionsformel für lineare Abbildungen.
4. Nennen Sie eine Folgerung der Dimensionsformel für lineare Abbildungen.

Aufgabe 5 $(3+3+3=9$ Punkte$)$**.** Wir betrachten

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}) \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3.$$

1. Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

   Gesucht: alle $x \in \mathbb{C}^3$ mit $A \cdot x = b$

2. Gibt es ein $c \in \mathbb{C}^3$, für das das lineare Gleichungssystem

   Gesucht: alle $x \in \mathbb{C}^3$ mit $A \cdot x = c$

   keine Lösung besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Zeigen Sie: Ist $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$, so gilt $\det(A \cdot B) = 0$.

Aufgabe 6 $(2+4+3=9$ Punkte$)$**.** Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 + x_2 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Wir betrachten die Basis

   $$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

   von $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$.

2. Ist f über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Handelt es sich bei f um eine Rotation um den Nullpunkt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus mit $f \circ f = \mathrm{id}_V$. Zeigen Sie, dass f (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar ist.
Hinweis. Für alle $v \in V$ ist $v = 1/2 \cdot (v + f(v) - f(v) + v)$.