Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 0 vom 24. April 2017

Aufgabe 1 (Bilinearformen?). Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ b_1 : (x,y) &\longmapsto x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 \\ b_1 : (x,y) &\longmapsto x_1 \cdot x_1 + x_1 \cdot y_2 \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Die Abbildung b_1 ist eine Bilinearform (über $\mathbb{R}$).
2. Die Abbildung b_2 ist eine Bilinearform (über $\mathbb{R}$).

Aufgabe 2 (ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$). Sei

$$\begin{aligned} b \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto 2 \cdot x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass b ein Skalarprodukt definiert.

Aufgabe 3 (ein Skalarprodukt für Matrizen). Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei

$$\begin{aligned} b \colon M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A,B) &\longmapsto \operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}} \cdot B). \end{aligned}$$

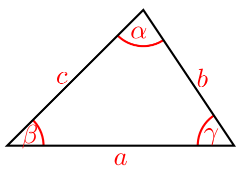
Zeigen Sie, dass b ein Skalarprodukt auf $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definiert.

Aufgabe 4 (Dreieck). Sei

$$\Delta := \left\{ t_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t_0, t_1, t_2 \in [0,1],\ t_0 + t_1 + t_2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1. Wie heißt der griechische Buchstabe auf der linken Seite? Beherrschen Sie das große und kleine griechische Alphabet?
2. Skizzieren Sie die Menge $\Delta \subset \mathbb{R}^2$.
3. Geben Sie sechs verschiedene Matrizen $A \in GL(2,\mathbb{R})$ mit $A \cdot \Delta = \Delta$ an. Welche geometrischen Namen haben die zugehörigen Abbildungen?
4. Machen Sie anschaulich plausibel, warum es keine weiteren solchen Matrizen geben kann.

Bonusaufgabe (Winkelsumme). Formalisieren Sie mithilfe von Begriffen aus der Linearen Algebra, was ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$ ist und was die Innenwinkel eines solches Dreiecks sind. Formulieren Sie dann den Satz über die Invarianz der Winkelsumme und beweisen Sie diesen.



---

keine Abgabe; diese Aufgaben werden in den Übungen
in der zweiten Vorlesungswoche besprochen