Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 13 vom 20. Juli 2017

Aufgabe 1 (Tensoren). Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K und seien $v, v' \in V$ und $w, w' \in W$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $v \otimes w = v' \otimes w'$, so folgt $v = v'$ und $w = w'$.
2. Es gilt $v \otimes w + v' \otimes w' = (v + v') \otimes (w + w')$.

Aufgabe 2 (Skalarprodukte und Tensorprodukte). Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Reformulieren Sie die Definition von Skalarprodukten auf V so, dass Sie nur das Tensorprodukt und Eigenschaften von linearen Abbildungen verwenden. Zeigen Sie, dass Ihre Reformulierung zur gewöhnlichen Definition äquivalent ist!

Aufgabe 3 (Assoziativität des Tensorprodukts). Sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} U \otimes_K (V \otimes_K W) &\longrightarrow (U \otimes_K V) \otimes_K W \\ u \otimes (v \otimes w) &\longmapsto (u \otimes v) \otimes w \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von K-Vektorräumen ist, indem Sie das folgende Diagramm geeignet dekorieren:

$$\begin{tikzcd}
U \times (V \times W) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & (U \times V) \times W \arrow[d] \\
U \times (V \otimes_K W) \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & (U \otimes_K V) \times W \arrow[d] \arrow[dl, dashed] \\
U \otimes_K (V \otimes_K W) \arrow[r, dashed, leftrightarrow] & (U \otimes_K V) \otimes_K W
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 4 (mehr zur koordinatenfreien Spur). Sei K ein Körper und sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

1. Wie sieht die Komposition von Endomorphismen von V unter dem kanonischen Isomorphismus $V^* \otimes_K V \cong_K \operatorname{Hom}_K(V, V)$ in $V^* \otimes_K V$ aus?
2. Wie kann man mit dem ersten Teil und der koordinatenfreien Beschreibung der Spur beweisen, dass für alle Endomorphismen $f, g \colon V \longrightarrow V$ die Spurgleichung
$$\operatorname{tr} f \circ g = \operatorname{tr} g \circ f$$
gilt?

Bonusaufgabe (Tensorprodukt über $\mathbb{Z}$). Schlagen Sie in der Literatur nach, wie das Tensorprodukt $\otimes_{\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{Z}$-Moduln definiert ist. Wie kann man den $\mathbb{Z}$-Modul

$$\mathbb{Z}/2017\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2016\mathbb{Z}$$

einfacher beschreiben?

Bonusaufgabe (mathematische Allgemeinbildung). Wer war Maryam Mirzakhani? Warum wird diese Aufgabe gerade jetzt gestellt?

Freiwillige Abgabe (bis zum 27. Juli 2017, 10:00, in die Briefkästen)