# Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 14 vom 27. Juli 2017

---

**Aufgabe 1** (äußere Produkte). Sei $K$ ein Körper, sei $V$ ein $K$-Vektorraum und seien $v, v' \in V$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $v \wedge v' = v' \wedge v$ in $\Lambda^2 V$, so folgt $v = v'$.
2. Es gilt $v \wedge v' + v' \wedge v = (v + v') \wedge (v' + v)$ in $\Lambda^2 V$.

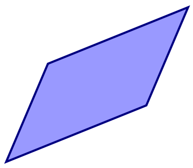
**Aufgabe 2** (algebraische Eigenschaften des Kreuzprodukts).

1. Ist das Kreuzprodukt $\times \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ kommutativ? Assoziativ? Gibt es ein neutrales Element für das Kreuzprodukt?
2. Gibt es zu allen $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein $z \in \mathbb{R}^3$ mit $x \times z = y$ ?

**Aufgabe 3** (geometrische Eigenschaften des Kreuzprodukts). Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$.

1. Zeigen Sie, dass $x \times y$ zu $x$ und $y$ orthogonal ist (bezüglich $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_2$).
2. Zeigen Sie: Ist die Familie $(x, y)$ linear unabhängig, so ist $(x, y, x \times y)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$, deren Orientierung mit der Orientierung der Standardbasis $(e_1, e_2, e_3)$ übereinstimmt.
3. Zeigen Sie, dass $\|x \times y\|_2$ der (euklidische) Flächeninhalt des von $x$ und $y$ in $\mathbb{R}^3$ aufgespannten Parallelogramms ist.

   *Hinweis.* Winkel?!



**Aufgabe 4** (Konstruktion der Volumenform). Sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum der Dimension $n > 0$ und sei eine Orientierung von $V$ gewählt. Zeigen Sie, dass es dann ein Element $\omega \in (\Lambda^n V)^*$ mit folgender Eigenschaft gibt: Für jede positiv orientierte Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von $V$ gilt

$$\omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = \sqrt{\det\bigl((\langle v_j, v_k \rangle)_{j,k \in \{1,\dots,n\}}\bigr)}.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Konstruieren Sie $\omega$, indem Sie der Anleitung im Skript folgen und die Details ausführen.
2. Welche geometrische Bedeutung hat die Volumenform im Fall des euklidischen Vektorraums $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot\,, \cdot \rangle_2)$ ? Warum?

**Bonusaufgabe** (Skript). Finden Sie möglichst viele Fehler im Skript!

---

keine Abgabe