Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 2 vom 4. Mai 2017

Aufgabe 1 (Eigenwerte von Bilinearformen). Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist B eine Basis von $\mathbb{R}^n$, so ist $\sigma_{\mathbb{R}}\bigl(M_B(b)\bigr) = \sigma_{\mathbb{R}}\bigl(M_{E_n}(b)\bigr)$.
2. Es gilt $\sigma_{\mathbb{R}}\bigl(M_{E_n}(b)\bigr) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Aufgabe 2 (Wieviele (symmetrische) Bilinearformen gibt es?). Sei K ein Körper und sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

1. Bestimmen Sie $\dim_K \operatorname{Bil}_K(V)$.
2. Bestimmen Sie die Dimension des K-Vektorraums aller symmetrischen Bilinearformen auf V.

Aufgabe 3 (Spieglein, Spieglein, ...). Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und zu $v \in V \setminus \{0\}$ sei

$$\begin{aligned} S_v\colon V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto x - 2 \cdot \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2} \cdot v. \end{aligned}$$

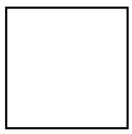
Man bezeichnet S_v als *Spiegelung an der zu v orthogonalen Hyperebene.*

1. Berechnen Sie $S_v(x)$ in den Fällen $x \in \mathbb{R}\cdot v$ bzw. $x \perp v$. Warum rechtfertigt dies die Bezeichnung von S_v als Spiegelung?
2. Zeigen Sie, dass S_v eine Isometrie bezüglich der induzierten Norm ist.
3. Zeigen Sie: Ist $\dim_{\mathbb{R}} V \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist $\det S_v = -1$.
4. Skizzieren Sie S_v in den Fällen $v = e_2$ bzw. $v = e_1 + e_2$ in $(\mathbb{R}^2, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_2)$. Ist die Komposition $S_{e_1} \circ S_{e_1+e_2}$ auch eine Spiegelung?

Aufgabe 4 (Isometriegruppe eines Quadrats). Sei $Q := [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ und sei $G := \bigl\{ f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \bigm| f(Q) = Q \bigr\}$. Dann ist G eine Gruppe.

1. Zeigen Sie, dass G genau acht Elemente enthält.

   Hinweis. Was passiert mit den Ecken des Quadrats? Warum?
2. Ist die Gruppe G abelsch? Begründen Sie Ihre Antwort!



Bonusaufgabe (Würfel). Vervollständigen Sie im OpenSCAD-Programm auf der Rückseite `cube_isometries` derart, dass ein Würfel erzeugt wird.

Abgabe bis zum 11. Mai 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

```
// Cube
//
//---------------------------------------------------------
// global settings
// global resolution settings
$fs = 0.1;  // facet resolution
$fa = 2;    // angle resolution
$fn = 100;  // circle resolution
// helper geometry
debug = true;
// thickness of faces
t = 1;
// edge length of the cube
el = 20;

//---------------------------------------------------------
// main:
cube(el);

//---------------------------------------------------------
// cube with edge length c (centred at the origin)
module cube(c) {
  union() {
    // we reconstruct the cube by applying enough symmetries to the base face
    cube_isometries() cube_baseface(c);
  }
}

// base face of the cube (edge length c)
module cube_baseface(c) {
  translate (-c/2*[0,0,1])         // moving the block to the correct position
  linear_extrude(t)                // 2D-square -> 3D-block of thickness t
  square(size = c, center = true); // 2D-square
}

// two generating symmetries of the cube
module c_r1() {
   rotate(a=90,v=[1,0,0]) children();
}
module c_r2() {
   rotate(a=90,v=[0,1,0]) children();
}

// enough symmetries of the cube
module cube_isometries() {
  union() {
    children();
    c_r1() children();
    // ?!
    // the isometries for the remaining faces are missing ...
    // note that isometries can also be composed,
    // using syntax of the form "f() g() children();" etc
    // ?!
  }
}
```