Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 4 vom 18. Mai 2017

Aufgabe 1 (adjungierte Homomorphismen). Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Es gilt $(f^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = f$.
2. Es gilt $(f \circ f)^{\mathsf{H}} = f^{\mathsf{H}} \circ f^{\mathsf{H}}$.

Aufgabe 2 (Hauptachsentransformation). Zu $c \in \mathbb{R}$ sei

$$Q_c := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3/2 \cdot x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + 3/2 \cdot x_2^2 = c\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1. Bestimmen Sie für jedes $c \in \mathbb{R}$ Hauptachsen für die Quadrik Q_c und bestimmen Sie die Menge $\{c \in \mathbb{R} \mid Q_c \neq \emptyset\}$.
2. Skizzieren Sie die Quadrik Q_2. Ist Q_2 beschränkt (bezüglich $\|\cdot\|_2$)?

Aufgabe 3 (Spektraldarstellung). Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Sei $\mathbb{K}$ der Grundkörper (also $\mathbb{R}$ im euklidischen Fall bzw. $\mathbb{C}$ im komplexen Fall). Zu $\lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(f)$ sei $p_\lambda\colon V \longrightarrow V$ die orthogonale Projektion auf $\operatorname{Eig}_\lambda(f)$. Zeigen Sie, dass dann die folgende *Spektraldarstellung* gilt:

$$f = \sum_{\lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(f)} \lambda \cdot p_\lambda$$

Aufgabe 4 (Polarzerlegung). Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{GL}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

1. Zeigen Sie, dass A eine *Polarzerlegung* besitzt, d.h., es existiert eine orthogonale Matrix $U \in \mathrm{O}(n)$ und eine symmetrische positiv definite Matrix $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit
$$A = U \cdot P.$$
2. Zeigen Sie außerdem, dass diese Matrizen U und P eindeutig durch A bestimmt sind.

Hinweis. Ziehen Sie die Wurzel aus $A^{\mathsf{T}} \cdot A$ …

Bonusaufgabe (Hauptminorenkriterium). Beweisen Sie das Hauptminorenkriterium für positive Definitheit: Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie: Dann ist A genau dann positiv definit, wenn

$$\forall_{j \in \{1,\dots,n\}} \quad \det A(j) > 0$$

ist. Dabei bezeichnet $A(j)$ die Matrix, die man aus A erhält, indem man die $(j+1)$-te, …, n-te Zeile und Spalte von A streicht.
Hinweis. Die Basiswechselformel für Matrizen von Bilinearformen ist sicher nützlich. Man kann die schwierige Richtung per Induktion über die Dimension beweisen. Im Induktionsschritt kann man analog zum Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt oder mit dem Sylvesterschen Trägheitssatz argumentieren.

Abgabe bis **Mittwoch, 24. Mai 2017, 16:00**, in die Briefkästen