Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 7 vom 8. Juni 2017

Aufgabe 1 (Quotienten und direkte Summen). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Es gilt $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (Irreduzibilität). Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und es sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der Vektorraum V ist f-reduzibel.
2. Der $K[T]$-Modul $V[f]$ ist zerlegbar.

Aufgabe 3 (freie Moduln). Sei R ein Ring und sei V ein R-Modul. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der R-Modul V ist frei.
2. Es gibt eine Menge I mit $V \cong_R \bigoplus_I R$.

Aufgabe 4 (Determinantenideale). Sei R ein kommutativer Ring, seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in M_{m\times n}(R)$. Mithilfe der Leibniz-Formel erhält man eine Definition der Determinante von quadratischen Matrizen mit Koeffizienten in R. Sei $r \in \{1, \dots, \min(m, n)\}$. Ein $r \times r$-*Untermatrix von* A ist eine Matrix der Form $(A_{j,k})_{j\in J, k\in K} \in M_{r\times r}(R)$, wobei $J \subset \{1, \dots .m\}$, $K \subset \{1, \dots, n\}$ mit $|J| = r = |K|$. Sei

$$D_r(A) := \operatorname{Span}_R\bigl\{\det B \bigm| B \text{ ist eine } r\times r\text{-Untermatrix von } A\bigr\} \subset R$$

das von den r-Minoren von A erzeugte Ideal in R.

1. Bestimmen Sie für die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z})$$
die Ideale $D_1(A)$ und $D_2(A)$.
2. Zeigen Sie: Sind $S \in M_{m\times m}(R)$ und $T \in M_{n\times n}(R)$, so gilt
$$D_r(S\cdot A) \subset D_r(A) \quad \text{und} \quad D_r(A\cdot T) \subset D_r(A)$$
für alle $r \in \{1, \dots, \min(m, n)\}$.
3. Folgern Sie: Sind $S \in M_{m\times m}(R)$ und $T \in M_{n\times n}(R)$ invertierbar (d.h. diese Matrizen besitzen multiplikative Inverse in $M_{m\times m}(R)$ bzw. $M_{n\times n}(R)$), so gilt $D_r(S\cdot A\cdot T) = D_r(A)$ für alle $r \in \{1, \dots, \min(m, n)\}$.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Verschwörung!). Fünfundzwanzig Modulbeauftragte planen eine Revolution und kommen daher zu konspirativen Sitzungen zusammen. Der Sitzungsmarathon besteht aus sechs Terminen, zu denen sich die fünfundzwanzig Teilnehmer auf fünf Räume verteilen. Um die Konspirativität zu bewahren, besteht jede dieser Sitzungsgruppen aus genau fünf Teilnehmern. Andererseits soll jeder Teilnehmer mindestens einmal mit jedem anderen Teilnehmer in einer dieser Fünfergruppen konspiriert haben. Zeigen Sie, dass es möglich ist, einen Sitzungsplan zu erstellen, der diese Bedingungen erfüllt.
Hinweis. Betrachten Sie den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Wieviele Untermoduln mit genau fünf Elementen besitzt dieser? Wie kann man die Elemente der zugehörigen Quotientenmoduln interpretieren?

Abgabe bis **Mittwoch, 14. Juni 2017, 16:00**, in die Briefkästen