Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 8 vom 15. Juni 2017

Aufgabe 1 (Ideale/Teilbarkeit). Sei R ein Ring und seien $a, b \in R$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Es gilt $(a + b) = (a) + (b)$.

   Hinweis. Dabei ist $(a) + (b) = \{x + y \mid x \in (a), y \in (b)\}$.

2. Es gilt $(a \cdot b) = (a) \cap (b)$.

Aufgabe 2 (Primfaktorzerlegungen über verschiedenen Körpern). Bestimmen Sie Primfaktorzerlegungen des Polynoms

$$T^4 - 4$$

in $\mathbb{Q}[T]$ bzw. $\mathbb{R}[T]$ bzw. $\mathbb{C}[T]$ (und begründen Sie jeweils, warum es sich dabei um Primfaktorzerlegungen handelt).

Aufgabe 3 (Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung). Sei R ein Integritätsring und seien $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m \in R$ Primelemente mit

$$\prod_{j=1}^{n} p_j = \prod_{j=1}^{m} q_j.$$

Zeigen Sie: Dann ist $n = m$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in S_n$ und Einheiten $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in R^\times$ mit

$$\forall_{j \in \{1,\dots,n\}} \quad p_j = \varepsilon_j \cdot q_{\sigma(j)}.$$

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass p_1 zu einem der Elemente $q_1, \dots, q_m$ assoziiert ist und hangeln Sie sich dann Primfaktor für Primfaktor durch das Produkt.

Aufgabe 4 (zyklische Moduln). Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und es sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der Vektorraum V ist f-zyklisch.
2. Der $K[T]$-Modul $V[f]$ ist zyklisch.

Bonusaufgabe (prima Primzahl?!). Ist $4^{2345} + 2345^4$ eine Primzahl? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis.

Abgabe bis zum 22. Juni 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen