Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 1 vom 24. April 2017

Aufgabe 1 (Skalarprodukte). Wir betrachten

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Zeichnen Sie diese Vektoren in ein geeignetes Koordinatensystem und berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte:

$$\langle x, x \rangle_2, \quad \langle y, y \rangle_2, \quad \langle z, z \rangle_2, \quad \langle x, y \rangle_2, \quad \langle x, z \rangle_2, \quad \langle y, z \rangle_2$$

Aufgabe 2 (Förmchen). Sei

$$\begin{aligned} b \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 20 \cdot x_1 \cdot y_1 + 17 \cdot x_2 \cdot y_3 \end{aligned}$$

gegeben.

1. Ist b bilinear (über $\mathbb{R}$)?
2. Ist b symmetrisch?
3. Ist b positiv definit?

Aufgabe 3 (quadratische Formen). Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} b_\varepsilon \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x_1 \cdot y_1 + \varepsilon \cdot x_2 \cdot y_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} q_\varepsilon \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto b_\varepsilon(x, x). \end{aligned}$$

1. Für welche $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist b_ε positiv definit bzw. positiv semi-definit bzw. negativ definit bzw. negativ semi-definit bzw. indefinit?
2. Skizzieren Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid q_1(x) = 1\}$. Wie heißt das entstehende Gebilde?
3. Skizzieren Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid q_{-1}(x) = 1\}$. Wie heißt das entstehende Gebilde (jedenfalls, wenn man es geeignet dreht)?

Aufgabe 4 (Lücken). Welche Begriffe/Sätze aus der Linearen Algebra I haben Sie vergessen? Welche Beweise/Rechentechniken aus der Linearen Algebra I finden Sie dubios? Füllen Sie diese Lücken!

---

keine Abgabe!