Klausur zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — 1. August 2017

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	9	9	9	9	9	9	6	60
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sind $x, y, z \in V$ mit $x \perp z$ und $y \perp z$, so folgt $(x + y) \perp z$.
2. Die Gruppe $\mathrm{O}(2)$ ist abelsch.
3. Sind $A, B \in \mathrm{SO}(3)$, so ist auch $A + B \in \mathrm{SO}(3)$.

Aufgabe 2 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist $f\colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus zwischen faktoriellen Ringen und ist $p \in R$ prim, so ist auch $f(p)$ prim.
2. Es gilt
$$\mathbb{Z}/(2+7)\mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}.$$
3. Ist $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z})$ mit $\det A = 1$, so sind alle Elementarteiler von A (über $\mathbb{Z}$) Einheiten in $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gibt einen Ringhomomorphismus $f\colon \mathbb{Q}[T] \longrightarrow \mathbb{Q}[T]$ mit der Eigenschaft $f(T+1) = f(T^2+1)$.

2. Folgendes liefert eine wohldefinierte $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/1008\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/2016\mathbb{Z} \\ [x] &\longmapsto [x]. \end{aligned}$$

3. Ist K ein Körper, so liefert folgendes eine wohldefinierte K-lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow K \otimes_K K \\ \lambda &\longmapsto \lambda \otimes \lambda. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 $(1 + 1 + 4 + 3 = 9$ Punkte$)$**.**

1. Wie sind Integritätsringe definiert?
2. Geben Sie ein Beispiel für einen Ring, der ein Integritätsring ist und ein Beispiel für einen Ring, der kein Integritätsring ist.
3. Formulieren Sie den chinesischen Restsatz für Moduln.
4. Wie geht der chinesische Restsatz bei der Klassifikation von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen ein?

Aufgabe 5 ($4 + 2 + 3 = 9$ Punkte)**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

1. Gibt es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[T]$ mit $\deg p = 2$ und $p(A) = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A.

3. Gilt $\mathbb{C}^3[L(A)] \cong_{\mathbb{C}[T]} \mathbb{C}[T]/(T-2) \oplus \mathbb{C}[T]/(T-2) \oplus \mathbb{C}[T]/(T-2)$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 6 (2 + 5 + 2 = 9 Punkte)**.** Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} -x_1 + 2 \cdot x_2 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung f bezüglich dem euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_2$ selbstadjungiert ist.

2. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_2$ aus Eigenvektoren von f.

3. Zeigen Sie, dass die Bilinearform

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \big\langle x, f(y) \big\rangle_2 \end{aligned}$$

   indefinit ist.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus und sei $U \subset V$ ein f-invarianter Untervektorraum. Zeigen Sie: Ist V ein f-zyklischer K-Vektorraum, so ist U ein $f|_U$-zyklischer Vektorraum.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst: Es gibt $v \in V$, $n \in \mathbb{N}$ und $p_1, \dots, p_n \in K[T]$ mit $U = \operatorname{Span}_K\{p_1 \cdot v, \dots, p_n \cdot v\}$. Betrachten Sie dann das Ideal $(p_1, \dots, p_n)$ in $K[T]$ …