Klausur zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig 1. August 2017

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	9	9	9	9	9	9	6	60
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sind $x, y, z \in V$ mit $x \perp z$ und $y \perp z$, so folgt $(x+y) \perp z$.
2. Die Gruppe $\mathrm{O}(2)$ ist abelsch.
3. Sind $A, B \in \mathrm{SO}(3)$, so ist auch $A + B \in \mathrm{SO}(3)$.

Lösung:

1. Diese Aussage ist wahr, denn: Wegen $x \perp z$ und $y \perp z$ gilt
$$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 0 + 0 = 0,$$
und damit $(x+y) \perp z$.
2. Diese Aussage ist falsch, denn: Es gilt
$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2),$$
aber
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B \cdot A.$$
[Es gibt natürlich noch viele weitere solche Beispiele.]
3. Diese Aussage ist falsch, denn: Es sind
$$A := B := I_3 \in \mathrm{SO}(3),$$
aber wegen
$$\det(A+B) = \det(2 \cdot I_3) = 8 \cdot \det(I_3) = 8$$
ist $A + B \notin \mathrm{SO}(3)$.
[Es gibt natürlich noch viele weitere solche Beispiele.]

Aufgabe 2 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist $f : R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus zwischen faktoriellen Ringen und ist $p \in R$ prim, so ist auch $f(p)$ prim.
2. Es gilt
$$\mathbb{Z}/(2+7)\mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}.$$
3. Ist $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z})$ mit $\det A = 1$, so sind alle Elementarteiler von A (über $\mathbb{Z}$) Einheiten in $\mathbb{Z}$.

Lösung:

1. Diese Aussage ist falsch, denn: Die Ringe $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind faktoriell und die Inklusion $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ist ein Ringhomomorphismus. Das Element $2 \in \mathbb{Z}$ ist prim, aber $2 = f(2) \in \mathbb{Q}$ ist eine Einheit und daher *nicht* prim.

   [Es gibt natürlich noch viele weitere solche Beispiele.]
2. Diese Aussage ist falsch, denn: Die beiden angegebenen $\mathbb{Z}$-Moduln haben noch nicht einmal dieselbe Mächtigkeit; es gilt
$$\left|\mathbb{Z}/(2+7)\mathbb{Z}\right| = \left|\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\right| = 9,$$
   aber
$$\left|\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\right| = \left|\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right| \cdot \left|\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\right| = 2 \cdot 7 = 14 \neq 9.$$
3. Diese Aussage ist wahr, denn: Das Produkt der Elementarteiler von A ist nach dem Elementarteilersatz für Matrizen (assoziiert zu) $\det A = 1$. Also sind alle Elementarteiler von A Teiler von 1 (in $\mathbb{Z}$), und damit Einheiten in $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gibt einen Ringhomomorphismus $f\colon \mathbb{Q}[T] \longrightarrow \mathbb{Q}[T]$ mit der Eigenschaft $f(T+1) = f(T^2+1)$.
2. Folgendes liefert eine wohldefinierte $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung:
$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/1008\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/2016\mathbb{Z} \\ [x] &\longmapsto [x]. \end{aligned}$$
3. Ist K ein Körper, so liefert folgendes eine wohldefinierte K-lineare Abbildung:
$$\begin{aligned} K &\longrightarrow K \otimes_K K \\ \lambda &\longmapsto \lambda \otimes \lambda. \end{aligned}$$

Lösung:

1. Diese Aussage ist wahr, denn: Nach der universellen Eigenschaft der $\mathbb{Q}$-Algebra $\mathbb{Q}[T]$ gibt es einen $\mathbb{Q}$-Algebrenhomomorphismus (also insbesondere Ringhomomorphismus) $f\colon \mathbb{Q}[T] \longrightarrow \mathbb{Q}[T]$ mit $f(T) = 0$ (und $f(1) = 1$). Dann ist
$$f(T+1) = f(T) + 1 = 0 + 1 = 1 = 0^2 + 1 = f(T)^2 + 1 = f(T^2+1).$$
[Alternativ kann man auch $f(T) = 1$ wählen.]
2. Diese Aussage ist falsch, denn: In $\mathbb{Z}/1008\mathbb{Z}$ gilt $[1008] = [0]$, aber
$$\begin{aligned} [1008] &\longmapsto [1008] \in \mathbb{Z}/2016\mathbb{Z} \\ [0] &\longmapsto [0] \in \mathbb{Z}/2016\mathbb{Z} \end{aligned}$$
und $[1008] \neq [0]$ in $\mathbb{Z}/2016\mathbb{Z}$.
3. Diese Aussage ist falsch, denn: Sei $K := \mathbb{R}$. Dann erhalten wir
$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1 \otimes 1 \\ 2 \cdot 1 = 2 &\longmapsto 2 \otimes 2 = 2 \cdot 2 \cdot (1 \otimes 1) = 4 \cdot (1 \otimes 1), \end{aligned}$$
aber $4 \cdot (1 \otimes 1) \neq 2 \cdot (1 \otimes 1)$ in $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ (der Vektor $1 \otimes 1$ bildet eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$).

Aufgabe 4 ($1 + 1 + 4 + 3 = 9$ Punkte)**.**

1. Wie sind Integritätsringe definiert?
2. Geben Sie ein Beispiel für einen Ring, der ein Integritätsring ist und ein Beispiel für einen Ring, der kein Integritätsring ist.
3. Formulieren Sie den chinesischen Restsatz für Moduln.
4. Wie geht der chinesische Restsatz bei der Klassifikation von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen ein?

Lösung:

1. *Definition.* Sei R ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$. Man bezeichnet den Ring R als *Integritätsring*, wenn er *nullteilerfrei* ist, d.h., wenn

$$\forall_{x,y \in R} \quad x \cdot y = 0 \Longrightarrow (x = 0 \lor y = 0).$$

2. Der Ring $\mathbb{Z}$ ist ein Integritätsring; der Ring $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist *kein* Integritätsring.

   [Es gibt natürlich noch viele weitere solche Beispiele.]

3. *Der chinesische Restsatz für Moduln.* Sei R ein Integritätsring und seien $a, b \in R$ mit $(a, b) = (1)$ (dies ist zum Beispiel erfüllt, wenn R ein Hauptidealring ist und $\operatorname{ggT}((,a), b) = 1$ gilt). Seien $r, s \in R$ mit $r \cdot a + s \cdot b = 1$. Dann sind

$$\begin{aligned} f \colon R/(a \cdot b) &\longrightarrow R/(a) \oplus R/(b) \\ [x] &\longmapsto \bigl([x], [x]\bigr) \\ g \colon R/(a) \oplus R/(b) &\longrightarrow R/(a \cdot b) \\ \bigl([x], [y]\bigr) &\longmapsto [s \cdot b \cdot x + r \cdot a \cdot y] \end{aligned}$$

   wohldefinierte zueinander inverse R-Modulisomorphismen.

4. Man wählt zunächst eine endliche Präsentation des betrachteten Moduls, berechnet dann die Elementarteiler der entsprechenden Matrix und bestimmt dann Primfaktorzerlegungen der Elementarteiler. Man verwendet dann den chinesischen Restsatz, um die durch die Elementarteiler gegebene Zerlegung als direkte Summe zyklischer Moduln (zu den Elementarteilern) in eine direkte Summe von zyklischen Moduln zu Primpotenzen zu reorganisieren.

Aufgabe 5 $(4+2+3=9$ Punkte$)$**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

1. Gibt es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[T]$ mit $\deg p = 2$ und $p(A) = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A.

3. Gilt $\mathbb{C}^3[L(A)] \cong_{\mathbb{C}[T]} \mathbb{C}[T]/(T-2) \oplus \mathbb{C}[T]/(T-2) \oplus \mathbb{C}[T]/(T-2)$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Nein, denn: Ist $p \in \mathbb{C}[T]$ mit $p(A) = 0$, so gilt $\mu_A \mid p$. Es genügt daher zu zeigen, dass $\deg \mu_A > 2$ gilt:

   Wir bestimmen nun das Minimalpolynom μ_A von A. Dazu berechnen wir zunächst das charakteristische Polynom; es ist (Entwicklung nach der ersten Spalte)
   $$\chi_A = \det(T \cdot I_3 - A) = (T-2)^3 \in \mathbb{C}[T].$$
   Wegen
   $$\begin{aligned} 1(A) &= I_3 \neq 0 \\ (T-2)(A) &= I_3 - A \neq 0 \\ (T-2)^2(A) &= (I_3 - A)^2 = I_3^2 - 2 \cdot A + A^2 \neq 0 \end{aligned}$$
   folgt aus dem Satz von Cayley-Hamilton, dass $\mu_A = (T-2)^3 \in \mathbb{C}[T]$. Wegen $\deg \mu_A = 3 > 2$ folgt also die Behauptung.

2. Nach dem ersten Teil ist $\mu_A = (T-2)^3$; mit dem Satz über die Jordansche Normalform folgt also, dass die Jordansche Normalform von A einen Jordanblock der Größe 3 zum Eigenwert 2 hat. Da A eine 3×3-Matrix ist, ist dies bereits die gesamte Jordansche Normalform von A, also
   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Nein, denn: Nach dem zweiten Teil und dem Satz über die Jordansche Normalform gilt
$$\mathbb{C}^3\big[L(A)\big] \cong_{\mathbb{C}[T]} \mathbb{C}[T]/(T-2)^3.$$
Da $T-2 \in \mathbb{C}[T]$ prim ist, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage des Hauptsatzes über endlich erzeugte Moduln über dem Hauptidealring $\mathbb{C}[T]$, dass
$$\mathbb{C}^3\big[L(A)\big] \not\cong_{\mathbb{C}[T]} \mathbb{C}[T]/(T-2) \oplus \mathbb{C}[T]/(T-2) \oplus \mathbb{C}[T]/(T-2).$$
[Hier kann man auch anders argumentieren, z.B. umgekehrt über die Jordansche Normalform, die zu $\mathbb{C}[T]/(T-2) \oplus \mathbb{C}[T]/(T-2) \oplus \mathbb{C}[T]/(T-2)$ gehört oder über den Vergleich von Nullteilern.]

Aufgabe 6 $(2+5+2=9$ Punkte$)$**.** Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} -x_1 + 2\cdot x_2 \\ 2\cdot x_1 - x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung f bezüglich dem euklidischen Skalarprodukt $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_2$ selbstadjungiert ist.
2. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_2$ aus Eigenvektoren von f.
3. Zeigen Sie, dass die Bilinearform

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \big\langle x, f(y)\big\rangle_2 \end{aligned}$$

indefinit ist.

Lösung:

1. Wir verwenden den Matrizenkalkül: Offenbar ist f eine lineare Abbildung und die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis E_3 von $\mathbb{R}^3$ ist

$$A := M_{E_3,E_3}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Da diese Matrix symmetrisch ist, ist f bezüglich $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_2$ selbstadjungiert.

[Alternativ kann man dies auch anhand der Definition von Selbstadjungiertheit direkt nachrechnen.]

2. Es genügt, eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren der Matrix A aus dem ersten Teil zu bestimmen: Dazu bestimmen wir zunächst die Eigenvektoren und Eigenräume von A. Es gilt

$$\chi_A = \det(T\cdot I_3 - A) = (T-1)\cdot\big((T+1)^2 - 4\big) = (T-1)^2\cdot(T+3),$$

und somit $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -3\}$.

Für den Eigenraum zum Eigenwert 1 erhalten wir

$$\begin{aligned} V(A - I_3, 0) &= V\left(\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0\right) \\ &= \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Für den Eigenraum zum Eigenwert -3 erhalten wir

$$\begin{aligned} V(A + 3 \cdot I_3, 0) &= V\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, 0\right) \\ &= \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Also ist

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren zu A (bzw. f). Dabei handelt es sich außerdem um eine Orthonormalbasis (wie man direkt sieht).

[Man kann zunächst irgendeine Eigenbasis bestimmen und dann orthonormalisieren; in diesem Fall ist es jedoch leicht genug, direkt eine Orthonormalbasis zu „sehen“.]

3. Mit der Analyse aus dem zweiten Teil findet man leicht geeignete Zeugen für die Indefinitheit: Sei

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist (nach den Berechnungen im zweiten Teil)

$$\begin{aligned} \big\langle x, f(x) \big\rangle_2 &= \langle x, x \rangle_2 = 1 > 0 \\ \big\langle y, f(y) \big\rangle_2 &= \langle y, -3 \cdot y \rangle_2 = -3 \cdot \|y\|_2^2 < 0. \end{aligned}$$

Also ist die gegebene Bilinearform indefinit.

[Alternativ kann man natürlich auch auf andere Weise entsprechende Vektoren raten.]

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus und sei $U \subset V$ ein f-invarianter Untervektorraum. Zeigen Sie: Ist V ein f-zyklischer K-Vektorraum, so ist U ein $f|_U$-zyklischer Vektorraum.
Hinweis. Zeigen Sie zunächst: Es gibt $v \in V$, $n \in \mathbb{N}$ und $p_1, \dots, p_n \in K[T]$ mit $U = \operatorname{Span}_K\{p_1 \cdot v, \dots, p_n \cdot v\}$. Betrachten Sie dann das Ideal $(p_1, \dots, p_n)$ in $K[T]$ ...

Lösung: Da U ein f-invarianter Untervektorraum von V ist, ist $U[f|_U]$ über die Inklusion $U \subset V$ ein $K[T]$-Untermodul von $V[f]$.

Da V ein f-zyklischer K-Vektorraum ist, gibt es ein $v \in V$ mit

$$V = \operatorname{Span}_K\bigl\{p \cdot v \bigm| p \in K[T]\bigr\} = K[T] \cdot v.$$

Wegen $U \subset V$ und $\dim_K V < \infty$ ist auch U ein endlich-dimensionaler bzw. endlich erzeugter K-Vektorraum. Also gibt es $n \in \mathbb{N}$ und Polynome $p_1, \dots, p_n \in K[T]$ mit

$$U = \operatorname{Span}_K\{p_1 \cdot v, \dots, p_n \cdot v\}.$$

Da $K[T]$ ein Hauptidealring ist, gibt es ein $q \in K[T]$ mit

$$(q) = (p_1, \dots, p_n) \subset K[T].$$

Dann ist $U[f|_U] = K[T] \cdot q \cdot v$, denn:

- Wegen $p_1, \dots, p_n \in (q) = K[T] \cdot q$ ist
  $$U = \operatorname{Span}_K\{p_1 \cdot v, \dots, p_n \cdot v\} \subset K[T] \cdot q \cdot v.$$
- Sei umgekehrt $p \in K[T]$. Dann ist $p \cdot q \cdot v \in U$, denn: Wegen $(q) = (p_1, \dots, p_n)$ gibt es Polynome $a_1, \dots, a_n \in K[T]$ mit
  $$q = a_1 \cdot p_1 + \dots a_n \cdot p_n.$$
  Dann ist
  $$p \cdot q \cdot v = \sum_{j=1}^{n} p \cdot a_j \cdot p_j \cdot v \in U,$$
  da $U[f|_U]$ ein $K[T]$-Untermodul von $V[f]$ ist.

Also ist $U[f|_U] = K[T] \cdot q \cdot v$ und somit insbesondere ein zyklischer $K[T]$-Modul (erzeugt von dem Element $q \cdot v$). Daher ist U ein f-zyklischer Untervektorraum.

[Alternativ kann man, wenn man ein phantastisches Gedächtnis besitzt, die Erkenntnisse aus dem Beweis von Satz 2.5.1 verwenden.]