Übungen zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 5 vom 17. Mai 2013

Hinweis. Sie dürfen auf diesem Übungsblatt verwenden, dass

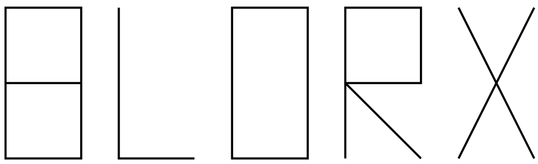
$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \pi_1(S^1, 1) \\ n &\longmapsto \bigl[\mathbb{C} \supset S^1 \ni z \mapsto z^n \in S^1 \subset \mathbb{C}\bigr] \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

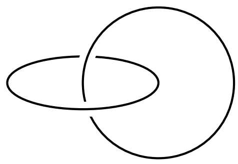
Aufgabe 1 (Tori)**.** Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $T^n := (S^1)^n$ der n-dimensionale Torus und $t_n := (1, \dots, 1) \in T^n$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ sind (T^n, t_n) und (T^m, t_m) genau dann punktiert homotopieäquivalent, wenn $n = m$ ist.
2. Sei $T := T^2/(\{1\} \times S^1)$. Dann sind $(T, [(1,1)])$ und (S^2, e_1^2) punktiert homotopieäquivalent.

Aufgabe 2 (Buchstabensuppe)**.** Klassifizieren Sie die folgenden fünf Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ (mit der Teilraumtopologie) bis auf (punktierte) Homotopieäquivalenz und bis auf Homöomorphie:



Aufgabe 3 (Houdini?)**.** Ein Ring aus Stahl und ein Gummiring seien wie folgt in $\mathbb{R}^3$ verschlungen:



Kann man diese beiden Ringe in $\mathbb{R}^3$ entschlingen, indem man den Gummiring geeignet deformiert (ohne ihn zu zerschneiden)?

1. Modellieren Sie diese Situation mithilfe geeigneter topologischer Begriffe.
2. Beantworten Sie die obige Frage und beweisen Sie Ihre Antwort (im Rahmen Ihres Modells).
3. Ändert sich etwas grundsätzlich, wenn wir dieselben Ringe und die entsprechende Frage in $\mathbb{R}^4$ statt $\mathbb{R}^3$ betrachten? Begründen Sie Ihre Antwort!

Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!
Hinweis. Wenn Sie möchten, dürfen Sie annehmen, dass der Gummiring die ganze Zeit über an einem Punkt festgehalten wird.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (freie Gruppen)**.** Sei G eine Gruppe. Eine Teilmenge $X \subset G$ ist ein *freies Erzeugendensystem von* G, wenn folgendes gilt: Die Menge X erzeugt G und für jede Gruppe H und jede Abbildung $\varphi \colon X \longrightarrow H$ gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\widetilde{\varphi} \colon G \longrightarrow H$ mit $\widetilde{\varphi}|_X = \varphi$. Eine *freie Gruppe* ist eine Gruppe, die ein freies Erzeugendensystem besitzt; die Mächtigkeit eines freien Erzeugendensystems einer freien Gruppe wird auch als *Rang* der freien Gruppe bezeichnet.

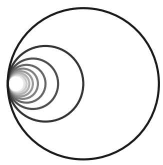
1. Besitzt $\mathbb{Z}/2$ ein freies Erzeugendensystem?

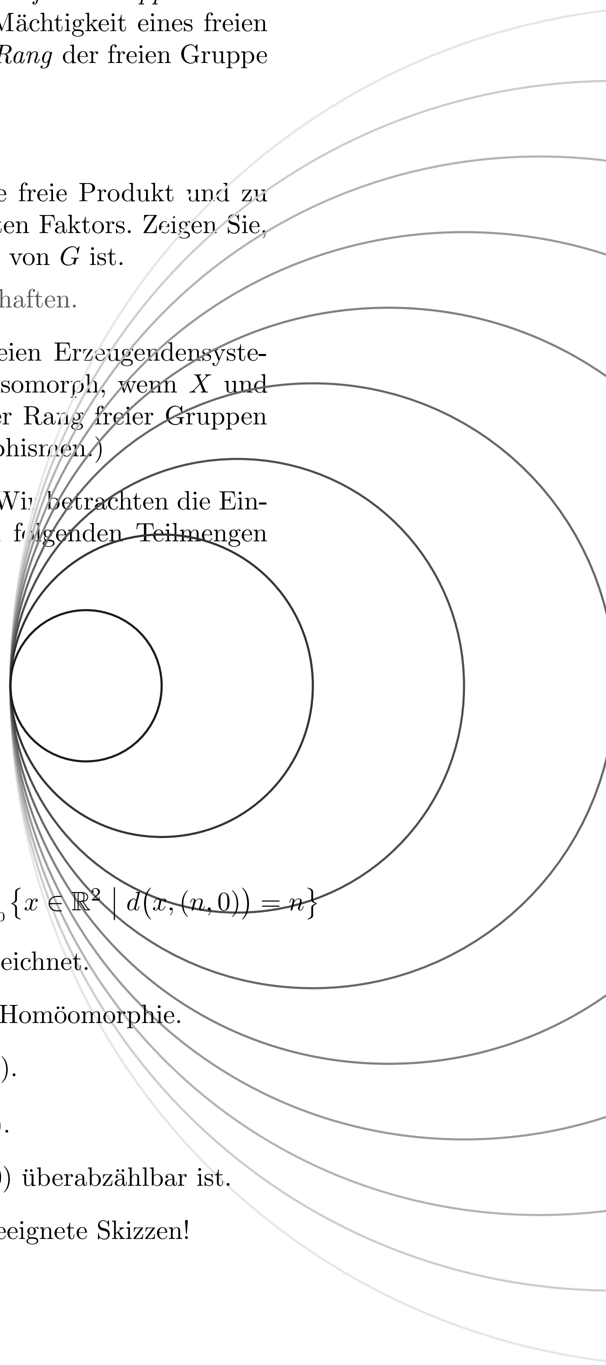
2. Sei X eine Menge, sei $G := \bigstar_X \mathbb{Z}$ das zugehörige freie Produkt und zu jedem $x \in X$ sei $i_x \colon \mathbb{Z} \longrightarrow G$ die Inklusion des x-ten Faktors. Zeigen Sie, dass $\{i_x(1) \mid x \in X\}$ ein freies Erzeugendensystem von G ist.

   Hinweis. Vergleichen Sie die universellen Eigenschaften.

3. Zeigen Sie: Sind G und G' freie Gruppen mit freien Erzeugendensystemen X bzw. X', so sind G und G' genau dann isomorph, wenn X und X' gleichmächtig sind. (Insbesondere ist somit der Rang freier Gruppen wohldefiniert und invariant unter Gruppenisomorphismen.)

Bonusaufgabe (hawaiianische und andere Ohrringe)**.** Wir betrachten die Einpunktvereinigung $(B, b_0) := \bigvee_{\mathbb{N}} (S^1, 1)$ und die beiden folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ (mit der Teilraumtopologie):





$$H := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \bigl\{x \in \mathbb{R}^2 \bigm| d\bigl(x, (1/n, 0)\bigr) = 1/n\bigr\} \qquad \widehat{H} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \bigl\{x \in \mathbb{R}^2 \bigm| d\bigl(x, (n, 0)\bigr) = n\bigr\}$$

Der Raum H wird auch als *hawaiianischer Ohrring* bezeichnet.

1. Klassifizieren Sie die Räume H, $\widehat{H}$ und B bis auf Homöomorphie.

2. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von (B, b_0).

3. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $(\widehat{H}, 0)$.

4. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe von $(H, 0)$ überabzählbar ist.

Illustrieren Sie Ihre Argumente und Ergebnisse durch geeignete Skizzen!

Abgabe bis zum 24. Mai 2013, 08:00 Uhr, in die Briefkästen