Übungen zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 6 vom 24. Mai 2013

Hinweis. Sie dürfen auf diesem Übungsblatt verwenden, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \pi_1(S^1, 1) \\ n &\longmapsto \bigl[\mathbb{C} \supset S^1 \ni z \mapsto z^n \in S^1 \subset \mathbb{C}\bigr] \end{aligned}$$

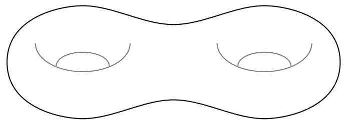
ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 1 (eigentlich diskontinuierliche Operationen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Alle freien Gruppenoperationen der Gruppe $\mathbb{Z}$ in Top sind eigentlich diskontinuierlich.
2. Die Decktransformationsgruppe einer Überlagerung operiert eigentlich diskontinuierlich auf dem Totalraum.

Aufgabe 2 (Brezelüberlagerungen)**.** Sei $(B, b) := (S^1, 1) \vee (S^1, 1)$.

1. Skizzieren Sie zwei zusammenhängende zweiblättrige Überlagerungen des Raumes (B, b), die in $\mathrm{Cov}_{(B,b)}$ nicht isomorph sind (und begründen Sie dies kurz).
2. Beschreiben Sie zu Ihren Beispielen aus dem ersten Teil jeweils die induzierten Abbildungen nach Anwenden von π_1.
3. Skizzieren Sie eine zusammenhängende dreiblättrige Überlagerung des Raumes (B, b), bei der die Decktransformationsgruppe *nicht* transitiv auf den Fasern operiert (und begründen Sie dies kurz).
4. Skizzieren Sie eine zusammenhängende zweiblättrige Überlagerung der folgenden zweidimensionalen Mannigfaltigkeit:



Aufgabe 3 (Die Hopf-Faserung)**.** Wir fassen S^1 als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf und wir fassen $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ via der kanonischen Identifikation $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ als Teilmenge von $\mathbb{C}^2$ auf. Dann ist

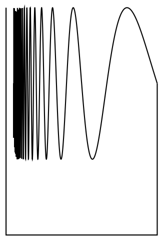
$$\begin{aligned} S^1 \times S^3 &\longrightarrow S^3 \\ \bigl(s, (z_1, z_2)\bigr) &\longmapsto (s \cdot z_1, s \cdot z_2) \end{aligned}$$

eine Operation der multiplikativen Gruppe S^1 auf S^3 in Top.

1. Zeigen Sie, dass $p\colon S^3 \longrightarrow S^1 \setminus S^3$ (die sogenannte *Hopf-Faserung*) ein lokal triviales Bündel mit Faser S^1 ist.
2. Zeigen Sie, dass der Quotient $S^1 \setminus S^3$ zu S^2 homöomorph ist.
3. Ist das Bündel $p\colon S^3 \longrightarrow S^1 \setminus S^3$ trivial? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Finden Sie in der Literatur eine graphische Darstellung der Hopf-Faserung und erklären Sie diese kurz.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Der Warschauer Kreis)**.** Der topologische Raum



$$K := \bigl\{(x, \sin(2 \cdot \pi/x)) \bigm| x \in (0,1]\bigr\} \\ \cup \bigl(\{1\} \times [-2,0]\bigr) \cup \bigl([0,1] \times \{-2\}\bigr) \cup \bigl(\{0\} \times [-2,1]\bigr)$$

(mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^2$) heißt *Warschauer Kreis.*

1. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe von K (bezüglich allen Basispunkten) trivial ist.

2. Zeigen Sie, dass K nicht-triviale Überlagerungen besitzt.

   Hinweis. Konstruieren Sie geeignete Überlagerungen aus Überlagerungen von S^1.

Bonusaufgabe (Fundamentalgruppen eindimensionaler Komplexe)**.** Ein *eindimensionaler Komplex* ist ein topologischer Raum X zusammen mit einem diskreten Teilraum X_0 mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Menge I und ein Pushout der Form

$$\begin{tikzcd} \coprod_I S^0 \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[d] \\ \coprod_I D^1 \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

wobei die linke vertikale Abbildung die kanonische Inklusion ist und die rechte vertikale Abbildung die Inklusion von X_0 nach X ist. D.h. eindimensionale Komplexe erhält man, indem man Intervalle auf eine gewisse Weise an ihren Endpunkten verklebt.

1. Wie kann man Einpunktvereinigungen von Kreisen als eindimensionale Komplexe auffassen?

2. Zeigen Sie: Ist (X, X_0) ein (wegzusammenhängender) eindimensionaler Komplex, so ist die Fundamentalgruppe von X (bezüglich allen Basispunkten) eine freie Gruppe.

Abgabe bis zum 31. Mai 2013, 08:00 Uhr, in die Briefkästen