Übungen zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 9 vom 14. Juni 2013

Aufgabe 1 (triviale Elemente in Homotopiegruppen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum und sei $\gamma \in \operatorname{map}_*((S^n, e_1^n), (X, x_0))$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist $[\gamma]_*$ das neutrale Element von $\pi_n(X, x_0)$, so kann $\gamma\colon S^n \longrightarrow X$ zu einer stetigen Abbildung $D^{n+1} \longrightarrow X$ fortgesetzt werden.

2. Falls $\gamma\colon S^n \longrightarrow X$ zu einer stetigen Abbildung $D^{n+1} \longrightarrow X$ fortgesetzt werden kann, ist $[\gamma]_*$ das neutrale Element von $\pi_n(X, x_0)$.

Aufgabe 2 (Σ und Ω)**.**

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass es eine (natürliche) Bijektion

   $$\pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}\bigl(\Omega(X, x_0)\bigr)$$

   gibt, und dass diese ein Gruppenisomorphismus ist, falls $n \geq 2$ ist.

2. Gibt es zu jedem punktierten topologischen Raum (X, x_0) einen punktierten topologischen Raum (Y, y_0) mit $(X, x_0) \simeq_* \Omega(Y, y_0)$? Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Gibt es zu jedem punktierten topologischen Raum (X, x_0) einen punktierten topologischen Raum (Y, y_0) mit $(X, x_0) \simeq_* \Sigma(Y, y_0)$? Begründen Sie Ihre Antwort!

4. Gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle punktierten topologischen Räume (X, x_0) eine Bijektion $\pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_{n+1}(\Sigma(X, x_0))$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (schwache Homotopieäquivalenzen)**.** Wir nennen eine stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ eine *schwache Homotopieäquivalenz*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_0 \in X$ die induzierte Abbildung $\pi_n(f)\colon \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$ bijektiv ist. Sei K der Warschauer Kreis (s. Aufgabe 4 von Blatt 6) und sei $k_0 := (0, -2) \in K$.

1. Zeigen Sie, dass die Inklusion $\{k_0\} \longrightarrow K$ in den Warschauer Kreis eine schwache Homotopieäquivalenz ist.

2. Ist der Warschauer Kreis (K, k_0) (punktiert) kontraktibel? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Quadrate und (Ko)Faserungen)**.**

1. Sei
$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$
ein Pullbackdiagramm in Top. Zeigen Sie: Ist $p\colon E \longrightarrow B$ eine (Serre-)-Faserung, so ist auch $p'\colon E' \longrightarrow B'$ eine (Serre-)Faserung.

2. *Bonusaufgabe.* Sei
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ A' \arrow[r, "i'"'] & X' \end{tikzcd}$$
ein Pushoutdiagramm in Top. Zeigen Sie: Ist $i\colon A \longrightarrow X$ eine Kofaserung, so ist auch $i'\colon A' \longrightarrow X'$ eine Kofaserung.

3. Sei $i\colon A \longrightarrow X$ eine Kofaserung und seien $f\colon X \longrightarrow Y$, $i'\colon A \longrightarrow X'$, $f'\colon X' \longrightarrow Y$ stetige Abbildungen mit $f' \circ i' \simeq f \circ i$. Zeigen Sie, dass es dann eine zu f homotope stetige Abbildung $g\colon X \longrightarrow Y$ mit
$$g \circ i = f' \circ i'$$
gibt.

4. *Bonusaufgabe.* Formulieren und beweisen Sie das Analogon des dritten Teils für Faserungen.

Bonusaufgabe (Kogruppenobjektstrukturen auf $(S^1, 1)$)**.**

1. Zeigen Sie, dass es auf $(S^1, 1)$ unendlich viele verschiedene (nicht notwendig koassoziative) Komultiplikationen in $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$ gibt; zeigen Sie, dass es auf $(S^1, 1)$ zwei Komultiplikationen in $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$ gibt, die koassoziativ sind.

2. Zeigen Sie, dass $(S^1, 1)$ *keine* kokommutative Kogruppenobjektstruktur in $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$ besitzt.

Abgabe bis zum 21. Juni 2013, 08:00 Uhr, in die Briefkästen