Übungen zur Algebraischen Topologie III

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 0 vom 8. April 2014

Aufgabe 1 (Ko- und Kontravarianz)**.** Seien C, D, E Kategorien und seien $F\colon C \longrightarrow D$, $G\colon D \longrightarrow E$ jeweils ko- oder kontravariante Funktoren. Definieren Sie die Komposition $G \circ F\colon C \longrightarrow E$ und entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind. Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Sind F und G kontravariant, so ist auch $G \circ F$ kontravariant.
2. Ist genau einer der beiden Funktoren F bzw. G kontravariant, so ist $G \circ F$ kontravariant.

Aufgabe 2 (Abspalten der Kohomologie des Punktes)**.** Sei R ein Ring und sei $\bigl((h^k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ eine Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$. Formulieren und beweisen Sie ein Analogon für das Abspalten der Homologie des Punktes für die Kohomologietheorie $\bigl((h^k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$.

Aufgabe 3 (Additivität für Paare?)**.** Sei R ein Ring und sei $\bigl((h^k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ eine additive Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$. Sei I eine Menge und sei $(X_i, A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Raumpaaren. Induzieren dann die Inklusionen $\bigl((X_i, A_i) \hookrightarrow (\coprod_{j\in I} X_j, \coprod_{j\in I} A_j)\bigr)_{i\in I}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen

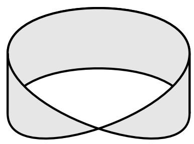
$$h^k\Bigl(\coprod_{i\in I} X_i, \coprod_{i\in I} A_i\Bigr) \longrightarrow \prod_{i\in I} h^k(X_i, A_i) \ ?$$

Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (Konstruktion einer Kohomologietheorie?)**.** Sei $\bigl((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in abelschen Gruppen mit Koeffizienten isomorph zu $\mathbb{Z}$. Liefert Anwenden des Funktors $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\,\cdot\,, \mathbb{Z})$ auf die Bestandteile von $\bigl((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ eine Kohomologietheorie auf Top^2 ? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (Vektorbündel)**.** Wiederholen Sie die folgenden Begriffe:

1. Vektorbündel über topologischen Räumen
2. Morphismen/Isomorphismen von Vektorbündeln
3. Pullback von Vektorbündeln entlang stetiger Abbildungen der unterliegenden Basisräume
4. Was hat das Möbiusband mit Vektorbündeln zu tun? Wieviele reelle Vektorbündel gibt es (bis auf Isomorphie) auf S^1 ?



---

keine Abgabe;
diese Aufgaben werden in der Übung am 16. April 2014 besprochen