Übungen zur Algebraischen Topologie III

Prof. Dr. C. Löh Blatt 7 vom 23. Mai 2014

Aufgabe 1 (Verträglichkeit von $\cdot \cup \cdot$ und $\cdot \times \cdot$)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, sei X ein topologischer Raum, seien $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$ und seien $\varphi \in H^p(X; R)$, $\psi \in H^q(X; R)$, $\varphi' \in H^{p'}(X; R)$, $\psi' \in H^{q'}(X; R)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

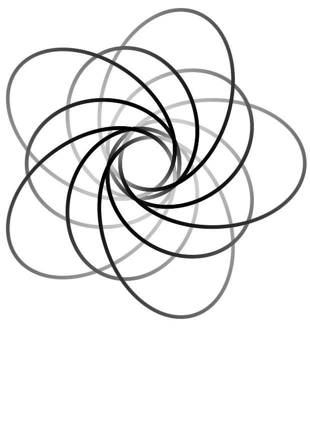
1. Es gilt $(\varphi \cup \psi) \times (\varphi' \cup \psi') = (-1)^{p \cdot p' + q \cdot q'} \cdot (\varphi \times \varphi') \cup (\psi \times \varphi') \cup (\varphi \times \psi') \cup (\psi \cup \psi')$.
2. Es gilt $(\varphi \cup \psi) \times (\varphi' \cup \psi') = (-1)^{q \cdot p'} \cdot (\varphi \times \varphi') \cup (\psi \times \psi')$.

Aufgabe 2 (Kreuz-Produkt auf $H^0(\,\cdot\,; R)$)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und seien X und Y Mengen mit der diskreten Topologie.

1. Zeigen Sie: Ist X oder Y endlich, so ist das kohomologische Kreuz-Produkt $\cdot \times \cdot : H^0(X; R) \otimes_R H^0(Y; R) \longrightarrow H^0(X \times Y; R)$ ein Isomorphismus.
2. Zeigen Sie: Ist $R \not\cong 0$ noethersch und sind X und Y unendlich, so ist das Kreuz-Produkt $\cdot \times \cdot : H^0(X; R) \otimes_R H^0(Y; R) \longrightarrow H^0(X \times Y; R)$ *kein* Isomorphismus.

Aufgabe 3 (Hopf-Invariante)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und seien $\alpha \in H^n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ und $\beta \in H^{2 \cdot n}(S^{2 \cdot n}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ Erzeuger. Zu einer stetigen Abbildung $f \colon S^{2 \cdot n - 1} \longrightarrow S^n$ sei $\operatorname{Cone}(f)$ der Abbildungskegel von f, sei $i \colon S^n \longrightarrow \operatorname{Cone}(f)$ die kanonische Inklusion und sei $p \colon \operatorname{Cone}(f) \longrightarrow \operatorname{Cone}(f)/i(S^n) \cong S^{2 \cdot n}$ die kanonische Projektion.

1. Bestimmen Sie den graduierten Modul $H^*(\operatorname{Cone}(f); \mathbb{Z})$ und zeigen Sie dabei insbesondere, dass $H^n(i; \mathbb{Z}) \colon H^n(\operatorname{Cone}(f); \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(S^n; \mathbb{Z})$ und $H^{2 \cdot n}(p; \mathbb{Z}) \colon H^{2 \cdot n}(S^{2 \cdot n}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2 \cdot n}(\operatorname{Cone}(f); \mathbb{Z})$ Isomorphismen sind.
2. Folgern Sie, dass es eine eindeutige ganze Zahl $h(f) \in \mathbb{Z}$ mit
$$H^n(i; \mathbb{Z})^{-1}(\alpha) \cup H^n(i; \mathbb{Z})^{-1}(\alpha) = h(f) \cdot H^{2 \cdot n}(p; \mathbb{Z})(\beta)$$
in $H^*(\operatorname{Cone}(f); \mathbb{Z})$ gibt. Man nennt $h(f)$ die *Hopf-Invariante von f*.
3. Zeigen Sie, dass es eine stetige Abbildung $f \colon S^3 \longrightarrow S^2$ mit $h(f) = 1$ gibt.
Hinweis. Denken Sie an die Standard-CW-Struktur von $\mathbb{C}P^2$.



Bitte wenden

Aufgabe 4 (die Alexander-Whitney-Abbildung)**.** Eine *Diagonalapproximation* ist eine natürliche Transformation $D\colon C(\,\cdot\,) \Longrightarrow C(\,\cdot\,) \otimes_{\mathbb{Z}} C(\,\cdot\,)\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ mit

$$D_X(\sigma) = \sigma \otimes \sigma$$

für alle topologischen Räume X und alle $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^0, X)$. Ist X ein topologischer Raum, so ist die *Alexander-Whitney-Abbildung von* X durch

$$\begin{aligned} A_X\colon C(X) &\longrightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{Z}} C(X) \\ \operatorname{map}(\Delta^n, X) \ni \sigma &\longmapsto \sum_{p=0}^{n} \sigma\rfloor_p \otimes {}_{n-p}\lfloor\sigma \end{aligned}$$

definiert.

1. Zeigen Sie, dass die Alexander-Whitney-Abbildung eine Diagonalapproximation $A\colon C(\,\cdot\,) \Longrightarrow C(\,\cdot\,) \otimes_{\mathbb{Z}} C(\,\cdot\,)$ liefert.

2. Zeigen Sie: Ist $D\colon C(\,\cdot\,) \Longrightarrow C(\,\cdot\,) \otimes_{\mathbb{Z}} C(\,\cdot\,)$ eine Diagonalapproximation, so ist

$$\begin{aligned} \cdot \cup_D \cdot : H^p(X;R) \otimes H^q(X;R) &\longrightarrow H^{p+q}(X;R) \\ [f] \otimes [g] &\longmapsto \bigl[(-1)^{p\cdot q} \cdot m_R \circ (f \otimes_{\mathbb{Z}} g) \circ D_X\bigr] \end{aligned}$$

   für alle kommutativen Ringe R mit Eins, alle topologischen Räume X, und alle $p, q \in \mathbb{Z}$ wohldefiniert und linear. Dabei ist $m_R\colon R \otimes_{\mathbb{Z}} R \longrightarrow R$ die Multiplikation auf R.

3. Zeigen Sie: Das Cup-Produkt auf $H^*(\,\cdot\,;R)$ stimmt mit $\cdot \cup_A \cdot$ überein.

4. Zeigen Sie: Sind D und D' Diagonalapproximationen und gilt für einen toplogischen Raum X, dass $D_X \simeq_{\mathbb{Z}\mathsf{Ch}} D'_X$, so stimmen $\cdot \cup_D \cdot$ und $\cdot \cup_{D'} \cdot$ auf $H^*(X;R)$ überein.

Bonusaufgabe (Hopf-Invariante und Homotopiegruppen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

1. Zeigen Sie, dass die Hopf-Invariante (s. Aufgabe 3) einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \pi_{2\cdot n-1}(S^n, e_1^{n+1}) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [f]_* &\longmapsto h(f) \end{aligned}$$

   liefert.

2. Zeigen Sie, dass $2 \in \mathbb{Z}$ im Bild dieses Gruppenhomomorphismus liegt, falls n gerade ist.

Somit folgt für gerade $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, dass $\pi_{2\cdot n-1}(S^n, e_1^{n+1})$ unendlich ist.

Abgabe bis zum 30. Mai 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten