Übungen zur Algebraischen Topologie III

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 8 vom 30. Mai 2014

Aufgabe 1 (freie Funktoren)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Der Funktor $C(\,\cdot\,\times\,\cdot\,)\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}^+$ ist frei.

2. Der Funktor $C(\,\cdot\,)\otimes_{\mathbb{Z}} C(\,\cdot\,)\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}^+$ ist frei.

Aufgabe 2 (singuläre Kettenkomplexe von Simplizes)**.** Sei $C_{\mathbb{Z}} \in {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ der Kettenkomplex, der im Grad 0 konzentriert ist und dort durch $\mathbb{Z}$ gegeben ist, und sei $n \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie, dass $C(\Delta^n) \simeq_{{}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}} C_{\mathbb{Z}}$.

2. Folgern Sie: Ist $C \in {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$, so gilt $C \otimes_{\mathbb{Z}} C(\Delta^n) \simeq_{{}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}} C$.

Aufgabe 3 (Diagonalapproximationen)**.** Eine *Diagonalapproximation* ist eine natürliche Transformation $D\colon C(\,\cdot\,) \Longrightarrow C(\,\cdot\,)\otimes_{\mathbb{Z}} C(\,\cdot\,)\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ mit

$$D_X(\sigma) = \sigma \otimes \sigma$$

für alle topologischen Räume X und alle $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^0, X)$ (siehe Aufgabe 4 von Blatt 7).

1. Zeigen Sie mit der Methode der azyklischen Modelle, dass es bis auf natürliche Kettenhomotopie genau eine Diagonalapproximation gibt.

2. Folgern Sie: Ist D eine Diagonalapproximation und R ein kommutativer Ring mit Eins, so stimmt das von D induzierte Cup-Produkt $\,\cdot\,\cup_D\,\cdot\,$ auf $H^*(\,\cdot\,;R)$ (siehe Aufgabe 4 von Blatt 7) mit dem gewöhnlichen Cup-Produkt überein.

Aufgabe 4 (der Satz von Eilenberg-Zilber)**.** Natürliche Transformationen der Form

$$P\colon C(①) \otimes_{\mathbb{Z}} C(②) \Longrightarrow C(① \times ②)\colon \mathsf{Top}\times\mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$$
$$Q\colon C(① \times ②) \Longrightarrow C(①) \otimes_{\mathbb{Z}} C(②)\colon \mathsf{Top}\times\mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$$

heißen *Eilenberg-Zilber-Morphismen vom Typ* $\otimes \to \times$ *bzw.* $\times \to \otimes$, falls

$$P(\sigma \otimes \tau) = (\sigma, \tau) \qquad \text{bzw.} \qquad Q(\sigma,\tau) = \sigma \otimes \tau$$

für alle topologischen Räume X, Y und alle $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^0, X)$, $\tau \in \operatorname{map}(\Delta^0, Y)$ gilt.

1. Zeigen Sie, dass Eilenberg-Zilber-Morphismen vom Typ $\otimes \to \times$ und vom Typ $\times \to \otimes$ existieren und dass diese jeweils bis auf natürliche Kettenhomotopie eindeutig sind.

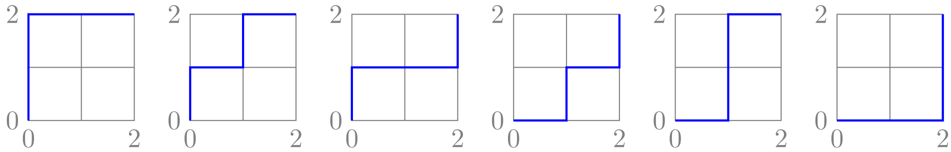
2. Zeigen Sie: Sind P und Q Eilenberg-Zilber-Morphismen vom Typ $\otimes \to \times$ bzw. $\times \to \otimes$, so sind $P \circ Q$ und $Q \circ P$ jeweils natürlich kettenhomotop zur Identität.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Shuffle-Produkt)**.** Seien $p, q \in \mathbb{N}$. Ein (p,q)-*Shuffle* ist eine Abbildung $s\colon \{0,\dots,p+q\} \longrightarrow \{0,\dots,p\} \times \{0,\dots,q\}$ mit der Eigenschaft, dass die beiden Komponenten s_1 und s_2 von s monoton wachsend sind und

$$s(0) = (0,0) \qquad \text{und} \qquad s(p+q) = (p,q)$$

gilt. Die Menge aller (p,q)-Shuffles bezeichnen wir mit $S(p,q)$. Ist $s \in S(p,q)$, so entspricht die Folge $(s(0),\dots,s(p+q))$ einem Kantenweg im Quadratgitter auf $\{0,\dots,p\} \times \{0,\dots,q\}$. Zum Beispiel sind die Elemente von $S(2,2)$ durch folgende Kantenwege in $\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$ gegeben:



Zu einem Shuffle $s \in S(p,q)$ sei $(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$ die eindeutige Permutation von $\{1,\dots,p+q\}$ mit folgender Eigenschaft: Es gilt

$$x_1 < x_2 < \dots < x_p \qquad \text{und} \qquad y_1 < y_2 < \dots < y_q$$

$$\forall_{j \in \{1,\dots,p\}} \quad s_1(x_j) > s_1(x_j - 1) \qquad \text{und} \qquad \forall_{j \in \{1,\dots,q\}} \quad s_2(y_j) > s_2(y_j - 1).$$

Sei $\varepsilon_s \in \{-1,1\}$ das Signum dieser Permutation $(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$. Außerdem sei $\sigma_s := \big([s_1(0),\dots,s_1(p+q)],[s_2(0),\dots,s_2(p+q)]\big) \in \operatorname{map}(\Delta^{p+q}, \Delta^p \times \Delta^q)$:

$$\begin{aligned} \sigma_s\colon \Delta^{p+q} &\longrightarrow \Delta^p \times \Delta^q \\ (t_0,\dots,t_{p+q}) &\longmapsto \left(\sum_{j=0}^{p+q} t_j \cdot e_{s_1(j)}, \sum_{j=0}^{p+q} t_j \cdot e_{s_2(j)}\right) \end{aligned}$$

Sind X und Y topologische Räume, so definieren wir das *Shuffle-Produkt*

$$\begin{aligned} S_{X,Y}\colon C_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} C_q(Y) &\longrightarrow C_{p+q}(X \times Y) \\ \sigma \otimes \tau &\longmapsto \sum_{s \in S(p,q)} \varepsilon_s \cdot (\sigma,\tau) \circ \sigma_s. \end{aligned}$$

1. Schreiben Sie ein LaTeX-Makro \shuffle mit folgender Eigenschaft: Sind p und q natürliche Zahlen, so liefert \shuffle{p}{q} eine graphische Darstellung aller Kantenzüge der Shuffles in $S(p,q)$.
2. Auf welcher geometrischen Idee beruht das Shuffle-Produkt? Illustrieren Sie Ihre Antwort durch geeignete Skizzen!
3. Was erhält man aus dem Shuffle-Produkt in dem Fall, dass der zweite Raum das Einheitsintervall $[0,1]$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Zeigen Sie, dass das Shuffle-Produkt einen Eilenberg-Zilber-Morphismus vom Typ $\otimes \to \times$ (siehe Aufgabe 4) liefert.

Abgabe bis zum 6. Juni 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten