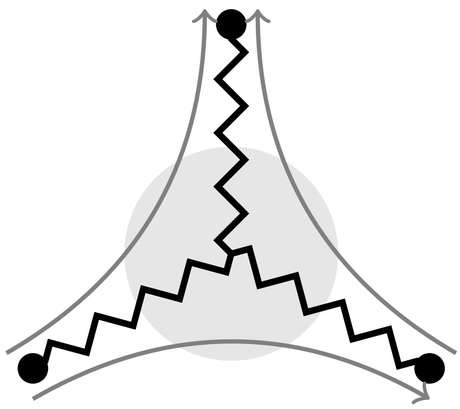
Seminar zur Algebraischen Topologie III: Beschränkte Kohomologie

C. Löh (clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de) Februar 2014

Es ist ein allgemeines Prinzip, algebraische Begriffe und Invarianten mit metrischer Information zu modifizieren oder zu verfeinern. Zum Beispiel liefert eine Abschwächung der Homomorphismuseigenschaft sogenannte Quasimorphismen von Gruppen und eine Mischung von homologischer Algebra mit funktionalanalytischen Konzepten führt zur sogenannten beschränkten Kohomologie. Dabei stellt sich heraus, dass solche Konzepte oft verblüffende Anwendungen in der theoretischen Mathematik besitzen.



In diesem Seminar werden wir uns mit einigen Beispielen dieses Prinzips beschäftigen, wobei der Schwerpunkt auf beschränkter Kohomologie und ihren Anwendungen in der Gruppentheorie, Geometrie und Topologie liegen wird.

Als Ausgangspunkt für die Vorträge werden wir im wesentlichen das Skript *Group Cohomology & Bounded Cohomology* (C. Löh, WS 2009/2010) [7] und die dort angegebenen Referenzen verwenden.

Falls Sie daran interessiert sind, im Zusammenhang mit diesem Seminar eine Abschlussarbeit zu schreiben, geben Sie bitte möglichst bald Bescheid.

Themen

Einführung in beschränkte Kohomologie

Vortrag 1 ((Ko)Homologie von normierten (Ko)Kettenkomplexen)**.** Wiederholung der nötigen funktionalanalytischen Begriffe und Resultate, normierte (Ko)Kettenkomplexe und ihre (Ko)Homologie, induzierte Halbnorm in (Ko)-Homologie, Halbnormen dichter Unterkomplexe, Dualitätsprinzip, Beispiele.
Literatur: [7, Kapitel 2.3.1/2.3.2], für die funktionalanalytischen Grundbegriffe: alle Bücher zur Funktionalanalysis

Vortrag 2 (Beschränkte Kohomologie von Räumen und Gruppen)**.** Beschränkte Kohomologie von topologischen Räumen (mit $\mathbf{R}$-Koeffizienten) und elementare Eigenschaften, beschränkte Kohomologie diskreter Gruppen (mit $\mathbf{R}$-Koeffizienten) über den Bar-Komplex, beschränkte Kohomologie im Grad 1 ist trivial, Vergleichsabbildung für beschränkte Kohomologie zu singulärer Kohomologie (für topologische Räume), ℓ^1-Halbnorm auf singulärer Homologie, wie kann man die ℓ^1-Halbnorm auf singulärer Homologie über beschränkte Kohomologie berechnen?
Literatur: [7, Kapitel 2.4.1/2.4.2, 2.5.1/2.5.2] (jeweils nur mit $\mathbf{R}$-Koeffizienten)

Beschränkte Kohomologie von diskreten Gruppen

Vortrag 3 (Beschränkte Kohomologie von freien Gruppen)**.** Wiederholung der Konstruktion/universellen Eigenschaft freier Gruppen (und freier Produkte), beschränkte Kohomologie im Grad 2 von freien Gruppen vom Rang größer als 1 ist nicht-trivial (über Auswertung mit ℓ^1-Homologie).
Literatur: [3, Anhang D] [7, Kapitel 2.5.3]

Vortrag 4 (Quasimorphismen und beschränkte Kohomologie)**.** Quasimorphismen, triviale Quasimorphismen, Beispiele, Zusammenhang zwischen beschränkter Kohomologie in Grad 2 und Quasimorphismen, Konsequenzen für freie Gruppen vom Rang größer als 1, Homogenisierung von Quasimorphismen, Quasimorphismen auf freien Produkten.
Literatur: [7, Kapitel 2.5.4] [13]

Vortrag 5 (Amenable Gruppen)**.** Definition amenabler Gruppen über invariante Mittel, Beispiele (insbesondere abelsche Gruppen), Vererbungseigenschaften, freie Gruppen vom Rang größer als 1 sind *nicht* amenabel.
Literatur: [7, Kapitel 2.6.1–2.6.4] [3] [11] [14]

Vortrag 6 (Charakterisierung amenabler Gruppen durch beschränkte Kohomologie)**.** Definition beschränkter Kohomologie von Gruppen mit Koeffizienten über den Bar-Komplex (inklusive aller dafür nötigen Begriffe), Charakterisierung amenabler Gruppen durch beschränkte Kohomologie.
Literatur: [7, Kapitel 2.2/2.5.1/2.5.2, 2.6.5]

Vortrag 7 (Relative homologische Algebra)**.** Relativ projektive/injektive Moduln, Beispiele (für diskrete Gruppen und topologische Räume), starke Auflösungen, Beispiele, Fundamentalsatz der (relativen) homologischen Algebra.
Literatur: [7, Kapitel 2.7.1] [6] [10]

Vortrag 8 (Beschränkte Kohomologie mit Koeffizienten)**.** Alternative Beschreibungen für beschränkte Kohomologie von Gruppen mit Koeffizienten (über starke relativ injektive/projektive Auflösungen), Dimensionsverschiebungsargument für beschränkte Kohomologie, das algebraische Mapping Theorem.
Literatur: [7, Kapitel 2.7.2, 2.8.1] [6]

Beschränkte Kohomologie von topologischen Räumen

Vortrag 9 (Gromovs Mapping Theorem – topologische Grundlagen)**.** Formulierung von Gromovs Mapping Theorem für topologische Räume, Whitehead-Türme (Moore-Postnikov-Türme) – Konstruktion und Eigenschaften, kurze Einführung in Prinzipalbündel und Eilenberg-MacLane-Räume, Beispiele.
Literatur: [7, Kapitel 2.8.2] [5, Theorem 4.71] [6]

Vortrag 10 (Gromovs Mapping Theorem)**.** Der beschränkte Kokettenkomplex einer universellen Überlagerung ist eine starke relativ injektive Auflösung von $\mathbf{R}$, Beweis von Gromovs Mapping Theorem für topologische Räume, Konsequenzen für die ℓ^1-Halbnorm auf singulärer Homologie, Zusammenhang zwischen beschränkter Kohomologie von Räumen und Gruppen.
Literatur: [7, Kapitel 2.8.2] [6]

Vortrag 11 (Simpliziales Volumen)**.** Definition, Zusammenhang mit dem Abbildungsgrad, Beispiele (insbesondere obere Abschätzung für Flächen), Zusammenhang mit beschränkter Kohomologie, Abschätzungen des simplizialen Volumens von Produkten, simpliziales Volumen von Überlagerungen, weitere Eigenschaften im Überblick.
Literatur: [7, 2.9.1, 2.9.5] [8] [2, Kapitel C] [4]

Vortrag 12 (Simpliziales Volumen und negative Krümmung)**.** Kurze Einführung in hyperbolische Mannigfaltigkeiten, Thurstons Straffungstechnik, Beweis der Nicht-Trivialität des simplizialen Volumens von geschlossenen hyperbolischen Mannigfaltigkeiten, Anwendung: Homotopieinvarianz des hyperbolischen Volumens, Nicht-Amenabilität der Fundamentalgruppen.
Literatur: [7, Kapitel 2.9.2] [2, Kapitel A, B, C] [6]

Ablauf des Seminars

Notwendig für den Scheinerwerb sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnahme im Seminar (stellen Sie Fragen während der Vorträge, wenn Sie etwas nicht verstehen!).
- Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.
- Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese muß bis spätestens eine Woche vor dem Vortrag abgegeben werden.
- Bitte kommen Sie spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag vorbei, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen.
- Die Seminarleistungen werden wie in den entsprechenden Prüfungsordnungen benotet und angerechnet.

Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung (am besten vor Beginn des Semesters) und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote.
- Grundvoraussetzung für einen Seminarvortrag ist das mathematische Verständnis des Stoffes. Dabei sollten Sie mehr über das Thema wissen als Sie im Vortrag erwähnen werden.
- Geben Sie zu Beginn einen kurzen Überblick über Ihren Vortrag. Stellen Sie die Hauptaussagen Ihres Vortrags soweit wie möglich an den Anfang; damit vermeiden Sie es, diese am Ende des Vortrags unter Zeitdruck erläutern zu müssen.
- Unterscheiden Sie für das Publikum klar erkennbar zwischen Wichtigem und weniger Wichtigem. Überfordern Sie die Zuhörer nicht durch zuviele technische Details (Sie sollten diese aber selbstverständlich verstanden haben). Erklären Sie lieber die wesentlichen Ideen/Beweisschritte.
- Strukturieren Sie Ihren Vortrag; Überschriften für einzelne Abschnitte können dabei helfen. Je logischer und natürlicher Ihr Vortrag aufgebaut ist, desto leichter hält sich der Vortrag und desto verständlicher ist er.
- Machen Sie sich im Aufbau des Vortrags unabhängig von der Literatur. Ein Aufbau, der für einen Text sinnvoll ist, kann für einen Vortrag ungeeignet sein.

- Seien Sie der Literatur gegenüber kritisch. Sie sollten auch versuchen, selbst geeignete ergänzende Literatur zu finden. Geeignete Ausgangspunkte sind zum Beispiel:

  http://books.google.com
  http://www.ams.org/mathscinet
  http://www.springerlink.com

- Planen Sie den zeitlichen Ablauf des Vortrags. Überlegen Sie sich schon vor dem Vortrag, welche Teile Sie bei Zeitnot kürzen können und welche Sie, wenn es die Zeit erlaubt, ausführlicher behandeln wollen. Ein Probevortrag kann helfen den zeitlichen Ablauf des Vortrags abzuschätzen.

- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Votragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt. Überlegen Sie, welche Begriffe/Aussagen aus den vorherigen Vorträgen Sie nochmal kurz wiederholen sollten.

- Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem LaTeX besser kennenzulernen [9]; dafür werden auch LaTeX-Vorlagen zur Verfügung gestellt: http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/topsem_ss14/

- Achten Sie darauf, in der Ausarbeitung eigenständig zu formulieren und alle verwendeten Quellen vollständig und korrekt zu zitieren.

Hinweise zum Halten des Vortrags

- Schreiben Sie lesbar und lassen Sie Ihren Zuhörern genug Zeit zum Lesen. Vermeiden Sie es unbedingt, das gerade Geschriebene sofort wieder hinter einer anderen Tafel verschwinden zu lassen, wegzuwischen, oder zu schnell auf die nächste Folie umzuschalten. Planen Sie Ihr Tafelbild bzw. Ihre Folien.

- Schreiben Sie alle Definitionen an. Machen Sie bei allen Sätzen klar, was die genauen Voraussetzungen sind.

- Versuchen Sie, Definitionen und Sätze anschaulich bzw. durch Anwendungsbeispiele zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.

- Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.

- Sprechen Sie laut und deutlich.

- Versuchen Sie, Ihre Zuhörer für Ihren Vortrag zu interessieren und beziehen Sie Ihr Publikum mit ein. Eine Frage an das Publikum gibt diesem Zeit nachzudenken, selbst wenn niemand die Antwort weiß.

– Versetzen Sie sich in Ihr Publikum hinein. Könnten Sie Ihrem Vortrag folgen, auch wenn Sie sich nicht vorher ausführlich mit dem Thema beschäftigt hätten?

– Haben Sie keine Angst vor Fragen des Publikums – freuen Sie sich lieber über das Interesse! Zwischenfragen der Zuhörer helfen Ihnen auch einzuschätzen, wie gut das Publikum folgen kann und welche Dinge Sie etwas genauer erklären sollten.

Literatur

[1] A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.

Ein nettes Büchlein, das dabei hilft, mathematisch sauber und verständlich zu formulieren.

[2] R. Benedetti, C. Petronio. *Lectures on Hyperbolic Geometry.* Universitext, Springer, 1992.

[3] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert. *Cellular Automata and Groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2010.

[4] M. Gromov. Volume and bounded cohomology. *Publ. Math. IHES*, 56, pp. 5–99, 1982.

[5] A. Hatcher. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002. Online verfügbar unter http://www.math.cornell.edu/~hatcher/.

[6] N.V. Ivanov. Foundations of the theory of bounded cohomology. *J. Soviet Math.*, 37, pp. 1090–1114, 1987.

[7] C. Löh. *Group Cohomology & Bounded Cohomology*, Skript zur Vorlesung Algebraische Topologie III, Georg-August-Universität Göttingen, WS 2009/10
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/topologie3_ws0910/prelim.pdf

[8] C. Löh. Simplicial Volume, *Bull. Man. Atl.*, pp. 7–18, 2011.
http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Simplicial_volume

[9] F. Mittelbach, M. Goossens, J. Braams, D. Carlisle, C. Rowley. *The LaTeX Companion*, zweite Auflage, Addison-Wesley, 2004.

Eines der Standardwerke zur Benutzung von LaTeX; weitere Unterstützung finden Sie unter http://www.ctan.org/starter.html

[10] N. Monod. *Continuous Bounded Cohomology of Locally Compact Groups.* Volume 1758 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, 2001.

[11] A.L.T. Paterson. *Amenability.* Volume 29 of *Mathematical Surveys and Monographs*, AMS, 1988.

[12] J.G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds.* Volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1994.

[13] P. Rolli. Quasi-morphisms on free groups, preprint, available online at arXiv:0911.4234v2 [math.GR], 2009.

[14] V. Runde, *Amenability*, volume 1774 of *Springer Lecture Notes in Mathematics*, Springer, 2002.

[15] T. Tantau. *The* TikZ *and* PGF *Packages*,
http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/base/doc/generic/pgf/pgfmanual.pdf

Dokumentation des TikZ-Pakets für LaTeX, das es erlaubt, auf einfache Weise Graphiken in LaTeX zu erstellen.